

Kursleitermaterialien für die 6. Klasse

Ein Programm der Vector Stiftung in Kooperation mit dem Seminar für
Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Stuttgart (Abteilung Gymnasium)



Mathe kann ich **doch!**

SELBSTVERTRAUEN

MOTIVATION

ERFOLGSERLEBNISSE

DURCHBLICK

BESTÄRKUNG





Diese Publikation ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0): Detaillierte Informationen sind im Internet über <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de> abrufbar.

Materialsammlung zum Programm „Mkid – Mathe kann ich doch!“
Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Stuttgart /Vector Stiftung

1. Wichtige Hinweise zu den Materialien

Die hier veröffentlichten Materialien wurden von Lehrenden des Seminars Stuttgart entwickelt, um den Unterricht in den Kursen des Programms „Mkid – Mathe kann ich doch!“ zu unterstützen. Sie können selbstverständlich auch in anderen Zusammenhängen verwendet werden. Wir möchten aber eindringlich darauf hinweisen, dass sie nicht an Schulen im Unterricht eingesetzt werden sollen, an denen Mkid-Kurse durchgeführt werden. Es wäre kontraproduktiv, wenn die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler die Materialien schon aus dem Unterricht kennen würden.

Im Gegensatz zu „normalen“ Unterrichtsmaterialien sind die Inhalte nur Vehikel zur Veränderung von Einstellungen. Deshalb ist das übergeordnete Ziel immer das Kompetenzerleben der Lernenden und nicht die mathematische Perfektion bzw. die inhaltliche Vollständigkeit. Misserfolge und Unverständnis des Vorgehens würden den Zielen des Programms entgegenstehen. Es gilt der Grundsatz „Weniger ist manchmal mehr“. Wenn also alle Würfelnetze gesucht sind, dann kann es situationsbedingt sinnvoll sein, mit einigen Würfelnetzen zufrieden zu sein und die Vollständigkeit nicht weiter zu thematisieren.

Das Programm Mkid richtet sich an Schülerinnen und Schüler des mittleren Leistungssegments der Klassen 6 und 7. Insofern handelt es sich um je ein Materialienpaket für diese beiden Klassenstufen. Neben Mathematik-Themen enthalten die Pakete auch Materialien zum Programmieren und zur Physik. Insofern kann man Mkid auch als „MINT kann ich doch“ interpretieren. Wir haben uns auf diese beiden Klassenstufen konzentriert, weil aus Erfahrung dort die meisten Schülerinnen und Schüler für die Mathematik verloren gehen.

Die Materialien bestehen in der Regel aus einem Arbeitsblatt, den zugehörigen Lösungen, didaktischen Kommentaren und einem möglichen Unterrichtsverlauf. Sie sind also sehr detailliert ausgearbeitet. Trotzdem muss die Lehrkraft individuell auf die jeweilige Lerngruppe reagieren und das Vorgehen entsprechend anpassen. Sie sind für eine Unterrichtsstunde zwischen 45 Minuten und 90 Minuten gedacht und durch Kürzungen bzw. Erweiterungen passend gestaltbar.

Das Urheberrecht der Materialien liegt bei den Autoren. Die Materialien dürfen ohne Einschränkung im Unterricht verwendet werden und dazu auch beliebig verändert werden. Eine kommerzielle Nutzung ist hingegen ausgeschlossen.

Im Folgenden wird der pädagogisch-didaktische Hintergrund des Programms beschrieben. Er dient dazu, die Materialien richtig einzuordnen.

2. Das Programm „Mkid - Mathe kann ich doch!“

„Das brauchen Sie mir gar nicht zu erklären, ich verstehe das sowieso nicht.“ Wie oft hören Mathematik-Lehrkräfte diesen Satz in ihrem Unterricht! Eltern verzweifeln, weil ihre Kinder jegliche Art von Hilfe ablehnen. Was steckt dahinter?

Fragt man Schülerinnen und Schüler, in welchen Fächern es die gerechtesten Noten gibt, dann liegt Mathematik neben Chemie und Physik auf den vorderen Plätzen. Das ist nicht weiter verwunderlich, weil die Ergebnisse von Mathematikaufgaben besonders objektiv bewertet werden können. Da gibt es in der Regel keine Diskussionen. Im Unterrichtsgespräch zeigt sich in diesen Fächern auch sehr schnell, ob man den Inhalt verstanden hat.

In der Pubertät hinterfragen junge Menschen ihre Fähigkeiten, ihr Aussehen, sich selbst. Hinzu kommt, dass die Entwicklung kognitiver Fähigkeiten unterschiedlich schnell verläuft. Im Unterricht der Klasse 6, die gewöhnlich mit dem Beginn der Pubertät zusammenfällt, wird wenig Rücksicht darauf genommen, wie weit das Abstraktionsvermögen der Schülerinnen und Schüler entwickelt ist. Deshalb haben diejenigen Misserfolgserlebnisse, für die manche Aufgaben zu früh im Hinblick auf ihre kognitive Entwicklung gestellt werden. In Kombination mit der Einsicht, dass die Bewertung ihrer Leistung gerecht ist, kann nur logisch gefolgert werden, dass es an der eigenen Begabung liegt: Mathe kann ich nicht!

Aufgrund der vermeintlich fehlenden Begabung wenden sich Schülerinnen und Schüler deshalb lieber anderen Fächern zu. Das hat fatale Folgen, weil die Mathematik ein Gedankengebäude ist, bei dem fehlende Bausteine das Gesamtwerk zum Einsturz bringen. Es genügen wenige Misserfolge, um eine Abwärtsspirale in Gang zu setzen, die kaum noch aufzuhalten ist.

Auf diese Weise verlieren wir potenziell mathematisch-naturwissenschaftlich erfolgreiche Schülerinnen und Schüler für immer!

Mit dem Programm „Mkid – Mathe kann ich doch!“ wollen wir erreichen, dass Schülerinnen und Schüler, die Potenzial für Mathematik und Naturwissenschaften haben, dieses aber nicht nutzen, sich als kompetent in diesen Fächern erleben. Ihr Selbstbild soll sich so verändern, dass sie das naturwissenschaftliche Profil bzw. ein naturwissenschaftliches Wahlpflichtfach wählen. In einer mehrtägigen Fortbildung lernen die Kursleiter anhand der hier vorgestellten Materialien, wie sie das Selbstkonzept der Schülerinnen und Schüler nachhaltig stärken. Das Erlernete setzen sie in AGs an ausgewählten Schulen in Baden-Württemberg um.

Den Schulen bleibt die schwierige Aufgabe, die richtigen Schülerinnen und Schüler auszuwählen. Dies kann nur über die Eltern gelingen, weil wohl niemand, der Mathematik ablehnend gegenübersteht, freiwillig in eine Mathe-AG gehen wird. Um diese Schwierigkeit ganz zu umgehen, haben einige Schulen Mkid in den regulären Förderunterricht der Klasse 6 integriert. Die Mkids bilden dann eine eigene Fördergruppe.

Wie stärkt man nun das Selbstkonzept in Mathematik? Ausgehend von der Motivationstheorie von Deci und Ryan legen wir Wert auf Kompetenzerleben, soziale Eingebundenheit und Selbstbestimmtheit. Letztere erfordert einen Impuls der Eltern. Im Laufe der Zeit sollen die Schülerinnen und Schüler aber aus eigenem Antrieb die Mkid-AG besuchen.

Das Kompetenzerleben verlangt schwierige Aufgaben sowie Strategien, mit denen man diese selbstständig lösen kann. Schwierig müssen die Aufgaben sein, weil man nur dann ein echtes Erfolgserlebnis hat. Eine typische Aufgabe stammt z.B. aus dem Landeswettbewerb Mathematik: „Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{2017} ?“.

Die Strategie ist: „Wenn dir etwas zu schwierig ist, dann versuche es zu vereinfachen.“ Ein Hochspringer, der 1,8 m überspringen will, wird nicht hundertmal die Latte reißen, sondern zuerst mit einer

niedrigeren Höhe beginnen, seine Technik verbessern und sich dann langsam an sein Ziel heranarbeiten. In diesem Sinne berechnet man $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$ und bemerkt beim schriftlichen Multiplizieren, dass sich die letzte Ziffer immer nur aus der letzten Ziffer der vorherigen Potenz ergibt. Es ist $7^4 = 7^3 \cdot 7 = 343 \cdot 7 = \dots 1$, wegen $3 \cdot 7 = 21$. So erhält man schnell die Endziffern vieler Potenzen: $7^1=7$, $7^2=\dots 9$, $7^3=\dots 3$, $7^4=\dots 1$, $7^5=\dots 7$, $7^6=\dots 9$, $7^7=\dots 3$, $7^8=\dots 1$,...

Die Endziffern wiederholen sich. Nun muss man nur noch bemerken, dass die Endziffer 1 ist, wenn die Hochzahl durch 4 teilbar ist. 2016 ist durch 4 teilbar, also muss die Endziffer von 7^{2016} die Ziffer nach der 1 in der Folge der Endziffern sein. Damit ist die Endziffer von 7^{2017} eine 7.

Tatsächlich hilft diese Strategie bei vielen Mathematik-Aufgaben und auch im täglichen Leben. Die Leitlinie zum Kompetenzerleben lautet: „Wer die richtigen Strategien kennt, kann schwierige Probleme lösen. Mathe kann ich doch!“

Die zweite Komponente „soziale Eingebundenheit“ ist ebenfalls nicht unerheblich. Leider gibt es ein hartnäckiges Vorurteil zum Fach Mathematik.



1. Der Mathestreiber hat fettige Haare und kommt beim Weitsprung kaum über 1,20 Meter.
2. Cool und kreativ sein und gut in Mathe geht einfach nicht.
3. Es gibt ja Taschenrechner.

Quelle: Süddeutsche Zeitung
6/2006

Deshalb wollen wir durch Ausflüge ein Wir-Gefühl in der Gruppe erzeugen. Die Mkids erleben gemeinsam, dass Mathematik und Naturwissenschaften Spaß machen können. Unsere Erfahrungen zeigen jedenfalls, dass die Schülerinnen und Schüler auch deshalb gerne in die AG gehen, weil sie sich als Teil der Gruppe wohl fühlen.

Damit sind die Ziele von Mkid kurz dargestellt. Wir würden uns freuen, wenn die Materialien möglichst viele Schulen anregen, am Mkid-Projekt teilzunehmen. Wenn dabei die Ideen des Projekts auch auf den Regelunterricht abfärben, werden vielleicht weniger Menschen der Mathematik und den Naturwissenschaften ablehnend gegenüberstehen.

Bei der **Reihenfolge der Themen** hat man weitgehend freie Hand, es gibt es nur wenige Einschränkungen:

- zu Beginn empfehlen sich die Themen Mkid 6-01 Linsen und Mkid 6-02 Bonbons
- die Reihenfolge Mkid 6-06 Eulersche Polyederformel, Mkid 6-07 regelmäßige Polyeder und Mkid 6-08 Keplerstern sollte man einhalten
- die Reihenfolge Mkid 6-04 Summentrick und Mkid 6-16 Teilbarkeit sollte man einhalten
- Mkid 6-18 Problemlösen sollte erst dann behandelt werden, wenn man die Strategien schon kennen gelernt hat
- die Themen INF, PH und CH sollten eher erst ab der Mitte des Schuljahres behandelt werden

Abkürzungen:

Fächer: M ... Mathematik INF ... Informatik PH ... Physik CH ... Chemie

Schularten: RS ... Realschule GMS ... Gemeinschaftsschule

Autoren vom Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte (Gymnasium) Stuttgart (kurz: Seminer AFL (Gymnasium) Stuttgart):

Btl ... Gerhard Brüstle Hoc ... Detlef Hoche Kle ... Ute Kleinknecht Mai ... Heike Maier The ... Dr. Matthias Theis

Der Zusatz „B“ bei der Nummerierung bezeichnet die **Basis-Variante** zu einem Thema mit geringerem Umfang bzw. Schwierigkeitsgrad.

Bei Fragen oder Hinweisen zu diesem Material mailen Sie bitte gerne an Frau Luger von der Vector Stiftung: Christina.Luger@vector-stiftung.de

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 6-01	Fermi-Aufgabe: Linsen	M Alltagswissen	Hoc		4	4	ja	ein Problem in Teilprobleme zerlegen – realistisches Abschätzen von Sachverhalten
Mkid 6-02	Fermi-Aufgabe: Bonbons	M Alltagswissen	Kle		5	8	ja	ein Problem in Teilprobleme zerlegen – realistisches Abschätzen von Sachverhalten
Mkid 6-03	Endziffern bei Potenzen	M Arithmetik	Hoc	schriftliches Multiplizieren	4	4	nein	komplexe Sachverhalte vereinfachen
Mkid 6-04B	Summentrick	M Arithmetik	Btl	Rechnen	3	3	ja	komplexe Sachverhalte vereinfachen
Mkid 6-04	Summentrick	M Arithmetik	Btl	Rechnen	4	4		
Mkid 6-05	ANNA-Zahlen	M Arithmetik	Hoc	schriftliches Addieren	4	4	nein	komplexe Sachverhalte vereinfachen

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 6-06B	Eulersche Polyederformel	M Geometrie	Btl	Körper	4	4	ja	durch induktives Vorgehen einen allgemeinen Sachverhalt erschließen
Mkid 6-06	Eulersche Polyederformel	M Geometrie	Btl	Körper, Schrägbilder	4	5		
Mkid 6-07B	regelmäßige Polyeder	M Geometrie	Btl	Körper, Schrägbilder	5	5	ja	ein Problem in Teilprobleme zerlegen und alle Möglichkeiten ausschöpfen
Mkid 6-07	regelmäßige Polyeder	M Geometrie	Btl	Körper, Schrägbilder	4	4		
Mkid 6-08	Keplerstern	M Geometrie	Kle	Körper	5	6	ja	Basteln
Mkid 6-09	Informatik: Programmieren 1	INF	Hoc		5	12	ja	Tablet, PC, Smartphone kleines Einmaleins
Mkid 6-10	Informatik: Programmieren 2	INF	Hoc		2	2	ja	
Mkid 6-11	Informatik: Programmieren 3	INF	Hoc		2	2	ja	
Mkid 6-12B	Folgen	M Arithmetik	Btl	Rechnen	8	8	ja	induktives Vorgehen
Mkid 6-12	Folgen	M Arithmetik	Btl	Rechnen	5	5		
Mkid 6-13	Anzahl der Würfelnetze	M Geometrie	Btl	Netz eines Körpers	4	4	ja	ein Problem in Teilprobleme zerlegen und alle Möglichkeiten ausschöpfen
Mkid 6-14	dreistellige Zahlen	M Arithmetik	Hoc		4	4	ja	ein Problem in Teilprobleme zerlegen und alle Möglichkeiten ausschöpfen
Mkid 6-15	Gefängnistüren	M Arithmetik	The	Quadratzahlen, Teiler	3	4	nein	durch induktives Vorgehen einen allgemeinen Sachverhalt erschließen
Mkid 6-16B	Teilbarkeit	M Arithmetik	Btl	Teilbarkeitsregeln	5	5	ja	komplexe Sachverhalte vereinfachen
Mkid 6-16	Teilbarkeit	M Arithmetik	Btl	Teilbarkeitsregeln	4	4		
Mkid 6-17	Winkel	M Geometrie	The	Winkel zeichnen und messen	3	9	ja	spielerisch Winkel zeichnen üben

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 6-18	Problemlösen	M	Kle		7	8	ja	Problemlösestrategien: Zusammenfassung und Erweiterung
Mkid 6-19	Brüche auf dem Geobrett	M Arithmetik	Kle	Brüche	4	5	ja	Umgang mit Brüchen üben – Förderung der Grundvorstellung durch Visualisierung
Mkid 6-20B	Stammbrüche	M Arithmetik	Hoc	Brüche	4	4	ja	Umgang mit Brüchen üben
Mkid 6-20	Stammbrüche	M Arithmetik	Hoc	Brüche	4	4		
Mkid 6-21	Füllkurven experimentell	M Funktionen	Kle		4	4	nein	Grundvorstellung funktionaler Zusammenhang
Mkid 6-22	Physik: Roh oder gekocht ?	PH	The		4	8	ja	Experiment: Beobachtung und Erklärung
Mkid 6-23B	Chemie: Brausetablette	CH	The		4	8	ja	Experiment: Beobachtung und Erklärung; kürzere Gesamtversion (empfohlen)
Mkid 6-23	Chemie: Brausetablette 1	CH	Mai		5	8		Experiment: Beobachtung und Erklärung
Mkid 6-24	Chemie: Brausetablette 2	CH	Mai		1	1		
Mkid 6-25B	Übungsmodul Rechnen	M Arithmetik	Btl	Rechnen	6	6	ja	Rechenübungen
Mkid 6-25	Übungsmodul Rechnen	M Arithmetik	Btl	Rechnen	5	5		
Mkid 6-26	Übungsmodul Bruchrechnen	M Arithmetik	Hoc	Rechnen	2	3	ja	Rechenübungen
Mkid 6-27	Übungsmodul Textaufgaben	M	Kle		4	8	ja	Strategien bei Textaufgaben
Mkid 6-28B	Knobelaufgaben-Sammlung	M	Btl		4	45	ja	mögliche Puffer in den einzelnen Sitzungen: reiche Auswahl mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und Zeitbedarf
Mkid 6-28	Knobelaufgaben-Sammlung	M	Btl		4	31		mögliche Puffer in den einzelnen Sitzungen: reiche Auswahl mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und Zeitbedarf

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 6-29	Taxi-Geometrie	M Geometrie	Hoc		5	5	ja	Geometrie-Transfer; mit Schülerblatt für die Basisversion
Mkid 6-30	Quadratzahlen	M Arithmetik	Btl	Quadratzahlen	4	7	ja	Quadratzahlen in unterschiedlichen mathematischen Kontexten
Mkid 6-31	römische Zahlzeichen	M	Btl	Zahlsysteme	2	4	ja	ein unverzichtbares Bildungsgut
Mkid 6-32	Rückwärtsrechnen	M	Btl	Umkehroperationen	5	5	ja	Zaubertrick
Mkid 6-33	schöne Ergebnisse	M Arithmetik	Btl	Schriftliches Rechnen	4	4	ja	Das Erfinden von Aufgaben mit „schönen Ergebnissen“ macht Spaß 😊.
Mkid 6-34	Größen	M	Hoc	Umgang mit Größen	2	2	ja	Spiele
Mkid 6-35	Brüche 3-2-1	M Arithmetik	Btl	Wiederholung Bruchrechnen	6	8	ja	Das Zusammenbasteln von Zahltermen unter vorgegebenen Bedingungen zwingt zur intensiven Reflexion der Regeln.

Zusammen mit dieser Übersicht und dem Deckblatt umfasst das Mkid-Unterrichtsmaterial für die Klasse 6 insgesamt 183 Dateien.

Sachanalyse

Enrico Fermi 1901-1954 italienischer Kernphysiker (1938 Nobelpreis), der seinen Studenten gerne Aufgaben stellte, bei denen man gut schätzen können musste.

Eine Fermi-Aufgabe scheint auf den ersten Blick unlösbar, weil z.B. Informationen fehlen oder riesige Mengen betrachtet werden. Sie wird lösbar durch Zerlegung in kleinere Probleme und durch Abschätzung fehlender Informationen.

Die Zerlegung in kleinere Probleme ist eine weit über Fermi-Aufgaben hinausgehende tragfähige Strategie, die das zentrale Ziel der Stunde darstellt.

Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?

Im Unterricht sollte man die Zahlen der SuS nehmen. Diese Zahlen hier stammen aus Wikipedia (leicht angepasst).

Annahmen:

- In Chicago leben rund 3 Millionen Menschen.
- Pro Haushalt nehmen wir durchschnittlich 2 Personen an.
- Ungefähr in jedem zwanzigsten Haushalt gibt es ein Klavier, das regelmäßig gestimmt wird. Das kann man abschätzen, indem man die Schülergruppe fragt, wie viele ein Klavier haben und das dann nach unten korrigiert, weil es Gymnasiasten sind.
- Klaviere sollten einmal pro Jahr gestimmt werden.
- Es dauert etwa zwei Stunden, ein Klavier zu stimmen, inklusive Fahrzeit.
- Ein Klavierstimmer hat einen 8-Stunden-Tag, eine 5-Tage-Woche und arbeitet 40 Wochen pro Jahr.

Daraus ergibt sich die Zahl der pro Jahr zu stimmenden Klaviere in Chicago:

$(3.000.000 \text{ Einwohner}) / (2 \text{ Personen pro Haushalt}) \times (1 \text{ Klavier}/20 \text{ Haushalte}) \times (1 \text{ Mal Stimmen pro Klavier und Jahr}) = 75.000 \text{ Mal muss in Chicago pro Jahr ein Klavier gestimmt werden.}$

Ein Klavierstimmer kann folgende Arbeit bewältigen:

$(40 \text{ Wochen pro Jahr}) \times (5 \text{ Tage pro Woche}) \times (8 \text{ Stunden pro Tag}) / (2 \text{ Stunden pro Klavier}) = 800 \text{ Klaviere kann ein Klavierstimmer pro Jahr stimmen.}$

Demnach müsste es etwa 100 Klavierstimmer in Chicago geben.

Wie viele Linsen sind in einem 500g Paket?

Es gibt verschiedene Ansätze:

1. Man macht ungefähr gleich große Haufen, zählt die Anzahl der Linsen in einem Haufen und multipliziert mit der Anzahl der Haufen.
2. Man wiegt 10 g Linsen ab und zählt wie viele das sind.
3. Man nimmt das Paket als Quader an und zählt ungefähr, wie viele Linsen eine Quader-Länge, eine Quader-Breite, eine Quader-Höhe haben.

Didaktischer Kommentar

Diese Stunde steht am Anfang des Kurses. Man kann voraussetzen, dass die Zielgruppe mit einem schwachen Selbstbild in diesen Kurs kommt. Deshalb wäre es ungünstig, mit einer Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit zu beginnen.

Für ein deutliches Kompetenzerleben muss die zu bearbeitende Aufgabe als sehr schwierig beschrieben werden. Die Begriffe "Nobelpreisträger", "Studenten", "besonders schwierige Aufgaben" sollen das verdeutlichen und müssen entsprechend betont werden.

Gleichzeitig soll aber unbedingt auch die Machbarkeit herausgestrichen werden, wenn man nur die richtige Strategie hat.

Strategien zur Lösung schwieriger mathematischer Probleme sind das Ziel dieses Kurses. Es zeigt sich, auch Nobelpreisträger kochen nur mit Wasser und WIR können da durchaus mithalten.

Diese Überlegungen sollten am Anfang der Stunde stehen und einen Spannungsbogen über die ganze Stunde bilden. Nach der gemeinsamen Lösung des Klavierstimmer-Problems lassen wir die SuS bei den Linsen ein erstes Mal alleine auf ein solches Problem los. Die Lehrkraft sollte hier Zuversicht vermitteln.

Auch bei der Klavierstimmer-Aufgabe sollten die SuS stark einbezogen werden. Schätzungen und Annahmen sollten diskutiert und strategisch bewertet werden, indem man mit kleineren Zahlen arbeitet. Man könnte z.B. mit Google nach Klavierstimmern im Stadtteil suchen und zur Einwohnerzahl in Beziehung stellen. Man kann SuS fragen, die ein Klavier zuhause haben, wie oft das gestimmt wird und ob sie wissen, wie lange ein Klavierstimmer in der Regel daran arbeitet.

Bitte lieber etwas abweichende Werte der SuS nehmen, als an dieser Stelle zur Musterlösung korrigieren, die ja auch auf unbewiesenen Annahmen beruht.

Bei der Linsenaufgabe sollten die SuS selbst Lösungsstrategien entwickeln. Wenn keine Ideen kommen, dann kann man aus der Klavierstimmer-Aufgabe ableiten. Wie sind wir dazu gekommen, wie viele Klaviere es in Chicago wohl gibt?

Die Strategie ist die Zerlegung in Teilprobleme, bzw. die Reduktion der Anzahlen.

Bei der Ergebnissicherung sollte man zeigen, dass die Größenordnung aller Ergebnisse übereinstimmt, es wenig Sinn macht "auf die Linse genau" zu rechnen.

Günstig wäre es, wenn man schon während der Partnerarbeit durch Impulse darauf hin wirkt, dass vergleichbar große Ergebnisse herauskommen. Alternativ kann man auch eine falsche Annahme thematisieren. Aber Vorsicht: keine Frustration erzeugen, sondern das Gute an der Annahme herausheben. Fingerspitzengefühl!!!

Die Kinder könnten das Klavierstimmer-Problem zuhause vorrechnen.

Tafelanschrieb

Wie viele Linsen sind in einem 500g Paket? Ideen: Haufen machen Zählen wie viele 10 g wiegen Ergebnis: In einem 500g-Paket Linsen sind ungefähr ... Linsen.	<u>Fermi-Aufgaben</u> Enrico Fermi italienischer Nobelpreisträger stellte seinen Studenten besonders schwierige Aufgaben, z.B. Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago? Lösung: Wie viele Einwohner hat Chicago? 3 Mio. Wie viele Klaviere gibt es in Chicago? 75 000 Wie oft muss ein Klavier gestimmt werden? 1-mal im Jahr	Wie lange braucht ein Klavierstimmer für ein Klavier? 2 h Wie viele Klaviere stimmt ein Klavierstimmer am Tag? 4 Wie viele Tage arbeitet er im Jahr? 200 Angenommen alle sind gut beschäftigt, dann gibt es ... Klavierstimmer in Chicago.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Für eine 45 Min.-Stunde wird man evtl. die Klavierstimmer-Aufgabe nur vorführen.

Für eine 90 Min.-Stunde kann man noch weitere Aufgaben anfügen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L beschreibt Fermi-Aufgaben. Wer war Enrico Fermi. Was ist eine Fermi-Aufgabe. Das historische Klavierstimmer-Problem.	Tafel evtl. Bild aus Wikipedia
2. Erarbeitung FEU 15 Min.	Lösung des Klavierstimmer-Problems im Unterrichtsgespräch und an der Tafel. Strategie: Schwierigkeit reduzieren. Fragen: Wie viele aus der Klasse haben zu Hause ein Klavier? Daraus Schätzung, wie viele Haushalte haben ein Klavier, wenn es in Chicago 3 Mio. Einwohner gibt. Wie lange braucht man um ein Klavier zu stimmen? Wie viele Klaviere stimmt ein Klavierstimmer am Tag / im Jahr? Wie oft muss ein Klavier gestimmt werden?	Tafel: Sammlung der Fakten
3. Ergebnis EA 5 Min.	SuS rechnen aus den Fakten an der Tafel die Anzahl der Klavierstimmer in Chicago aus.	Heft
4. Ergebnissicherung FEU 10 Min.	Vergleich der Ergebnisse und der gemachten Annahmen. Bewertung der Ergebnisse.	
5. Neues Problem FEU 5 Min.	Wie viele Linsen sind in einem 500 g Paket enthalten? Verteilung der Pakete. Bereitstellung von Waagen.	Tafel Linsen, Waage
6. Erarbeitung PA 15 Min.	SuS bestimmen die Anzahl. Mögliche Lösungen vgl. Sachanalyse.	Linsen, Waage, Heft
7. Ergebnissicherung FEU 10 Min.	Vergleich der Ergebnisse und der Methoden. Reflexion über die Vorgehensweise. Zerlegung in kleinere Probleme. Parallelen zum Klavierstimmer-Problem.	Tafel
8. optional weitere Aufgaben	Wie viele Gummibärchen passen ins Klassenzimmer? Wie viele Blätter hat ein Baum? Wie viele Grashalme wachsen auf einem Fußballfeld?	

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Wie bereits in der ersten Stunde zu den Fermi-Aufgaben ist das Zerlegen eines großen Problems in kleinere Teilprobleme die entscheidende Strategie der Stunde.

- Wie viele kg oder Tonnen Bonbons werden beim Rosenmontagszug in Köln geworfen?
- Wie viele Bonbons würdest du vermutlich erhalten, wenn du beim Rosenmontagszug am Straßenrand stehen würdest?

Annahmen:

- Von 78 Wagen werden Bonbons geworfen.
- Auf jedem Wagen werfen 15 Personen Bonbons.
- Sie werfen 5-mal pro Minute Bonbons.
- Der Rosenmontagszug dauert 4 Stunden.
- Pro Wurf werden im Durchschnitt 20 Bonbons geworfen.
- Ein Bonbon wiegt 5 g.
- 1,2 Millionen besuchen den Rosenmontagszug.

Daraus ergibt sich für das Gewicht der geworfenen Bonbons:

$$(78 \text{ Wagen}) \times (15 \text{ Personen pro Wagen}) \times (5\text{-mal werfen pro Minute}) \times (4 \times 60 \text{ Minuten}) \times (20 \text{ Bonbons pro Wurf}) \times (5 \text{ Gramm pro Bonbon}) = 140\,400 \text{ kg Bonbons} \approx 140 \text{ t Bonbons.}$$

Anzahl der Bonbons, die ein Besucher beim Rosenmontagszug im Durchschnitt erhält:

$$(78 \text{ Wagen}) \times (15 \text{ Personen pro Wagen}) \times (5\text{-mal werfen pro Minute}) \times (4 \times 60 \text{ Minuten}) \times (20 \text{ Bonbons pro Wurf}) = 28\,080\,000 \text{ Bonbons werden geworfen.}$$

$$\text{Anzahl der Bonbons pro Besucher: } 28\,080\,000 \text{ Bonbons: } 1\,200\,000 \text{ Besucher} = 23,4.$$

Wenn jeder Besucher gleich viele Bonbons auffängt, müsste jeder ca. 23 Bonbons bekommen.

„Lösung“: (gemäß Angaben im Internet):

150 Tonnen Bonbons/Süßigkeiten,
(weiterhin werden geworfen: über 700.000 Tafeln Schokolade, über 220.000 Schachteln Pralinen, über 300.000 kleine Blumensträuße, Tausende Stoffpuppen)

- Kann eine Menschenkette aus allen Besuchern das Gebiet der Stadt Köln umrunden?

Vorgehensweise:

1. Stadtrand der Stadt Köln auf der Landkarte mit einer Schnur umlegen und damit Umfang auf der Karte bestimmen.
2. Mit Hilfe des Maßstabes den Umfang auf der Karte in den tatsächlichen Umfang umrechnen.
3. Spannweite einer Person ausmessen.
4. Länge der Menschenkette aller Teilnehmer berechnen.

Material:

- Bonbons	- Waagen (aus Physik- oder Chemiesammlung)
- Kopie Landkarte Region Köln bzw. Atlanten	- Schnur - Meterstab.

Didaktischer Kommentar

Dieses Thema kann auch in der letzten Stunde vor den Faschingsferien unterrichtet werden. Allein die Themenstellung und die Frage, wer den Rosenmontagsumzug aus dem Fernsehen kennt oder sogar bereits dort war, motivieren die SuS in hohem Maße.

Den SuS sind Fermi-Aufgaben bereits aus der ersten Mkid-Stunde bekannt. Sie sollten sich also an die Herangehensweise bei Fermi-Aufgaben erinnern können: Das Problem wird in Teilprobleme zerlegt, indem nach Fakten gesucht wird, die letztendlich zur Beantwortung der Fermi-Aufgabe nötig sind.

Im Gegensatz zur Stunde „Linsen-Fermi-Aufgabe“ sollen die SuS zunächst eigenständig in Gruppen (mit maximal 4 SuS) überlegen, welche Fragen zum Lösen der Aufgabe beantwortet werden müssen. Prinzipiell ist es denkbar, dass die SuS (wie in der Stunde „Linsen-Fermi-Aufgabe“) die benötigten Angaben abschätzen. Da es SuS oft schwer fällt, wichtige von unwichtigen Angaben zu unterscheiden, wird hier aber die Folie „Zahlenmaterial Rosenmontagszug“ aufgelegt. Aus ihr sollen die SuS für die Aufgabe relevante Angaben herauslesen. Zudem wird überlegt, wie noch fehlende Angaben ermittelt werden können: das Gewicht eines Bonbons wird durch Wiegen ermittelt; es wird ausprobiert, wie viele Bonbons durchschnittlich in eine Hand passen

Beim Vergleich der Ergebnisse sollten alle Lösungen wertgeschätzt werden - die Größenordnung aller Ergebnisse wird in etwa übereinstimmen. Es ist wichtig zu thematisieren, wie die Unterschiede in den Ergebnissen zustande kommen: unterschiedliche Lösungswege, Unterschiede beim Abschätzen von Angaben Es bleibt der Lehrkraft überlassen, ob sie den SuS die im Internet genannte „Lösung“ verraten möchte. Schließlich ist nicht die exakte Lösung der zentrale Aspekt der Stunde, sondern die Strategie zum Lösen der Aufgabe. Natürlich kann auch ein Preis vergeben werden für denjenigen, der am Stundenanfang die beste Schätzung für die Bonbonmenge abgegeben hat.

Anschließend wird die „Menschenketten-Frage“ bearbeitet. Die SuS erhalten hierzu eine Kopie des Stadtplans von Köln sowie eine Schnur. Alternativ ist es auch möglich, in der Geographie-Sammlung Atlanten auszuleihen. Die SuS müssten dabei selbst eine geeignete Karte im Atlas aussuchen und dort die Stadtgrenzen von Köln abschätzen. Die Lösungsstrategie sollen die SuS nun selbst entwickeln: mit Hilfe einer Schnur müssen sie den Umfang der Fläche der Stadt Köln bestimmen. Gleichzeitig wiederholen sie hier (aus Geographie bekannte) Umrechnungen mit einem Maßstab. Vermutlich werden die SuS hierbei vereinzelt Hilfestellungen durch die Lehrkraft brauchen.

Um die Problemlösefähigkeiten der SuS auszubauen, wird am Ende der Stunde die Vorgehensweise beim Lösen der Aufgaben reflektiert und die mitgebrachten Bonbons werden unter allen SuS aufgeteilt.

In 90-Minuten-Stunden können noch weitere Fermi-Aufgaben bearbeitet werden. Besonderen Spaß finden die SuS, wenn sie sich diese selbst ausdenken.

Der Kölner Rosenmontagszug

Wie viele kg oder Tonnen Bonbons werden beim Rosenmontagsumzug in Köln geworfen?

Wie viele Bonbons würdest du erhalten, wenn du am Straßenrand des Rosenmontagszugs stehen würdest?

Pufferaufgabe:

Angenommen, alle Besucher des Rosenmontagsumzugs bilden eine Menschenkette.

Könnte diese Kette das Gebiet der Stadt Köln umrunden?

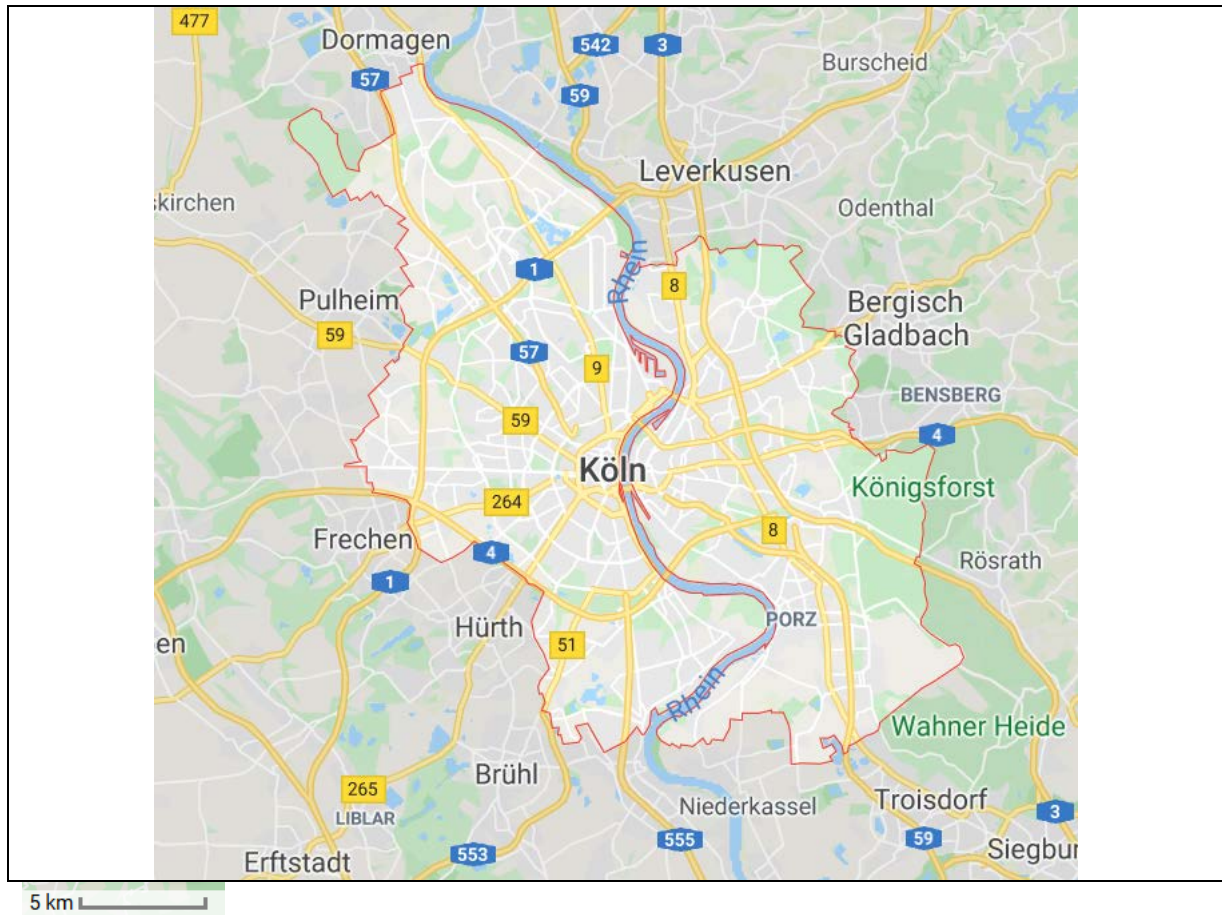
"Zahlenmaterial"

Der Kölner Rosenmontagszug

Zeitdauer:	4 Stunden
Länge des Zuges:	ca. 7 km
Wegstrecke:	ca. 6,5 km
Fest- und Prunkwagen und Kutschen:	99
Bagagewagen (diese führen das Wurfmaterial mit):	78
Teilnehmer:	10 200
Musikkapellen:	124
Pferde:	440
Besucher:	ca. 1,2 Millionen
Einwohnerzahl von Köln:	ca. 1 024 000
Einwohnerzahl des Großraumes Köln:	ca. 2 Millionen
Fläche von Köln:	ca. 405 km ²

Datenquellen:

<http://www.koelnerkarneval.de/karnevalszuege/rosenmontagszug/zug-in-zahlen/>
www.wikipedia.de



Quelle:

<https://www.google.de/maps/place/K%C3%B6ln/@50.950822,6.8968541,10.25z/data=!4m5!3m4!1s0x47bf259169ab2fe5:0x42760fc4a2a77f0!8m2!3d50.937531!4d6.9602786>
(Abrufdatum: 21.03.2020)

Tafelanschrieb

Kann eine Menschenkette aus den Besuchern des Zugs das Gebiet der Stadt Köln umspannen? <u>Vorgehensweise:</u> Umfang des Stadtgebietes auf Landkarte bestimmen und mit Maßstab umrechnen Spannweite einer Person messen. <u>Rechnung:</u> <u>Ergebnis:</u>	<u>Der Kölner Rosenmontagszug</u> Wie viele kg oder Tonnen Bonbons werden beim Rosenmontagszug in Kölns geworfen? Wie viele Bonbons würdest du vermutlich erhalten, wenn du beim Rosenmontagszug am Straßenrand stehen würdest? <u>Benötigte Angaben:</u> Von wie vielen Wagen werden Bonbons geworfen? 78 Wie viele Personen werfen auf so einem Wagen Bonbons? ... Wie lange dauert der Umzug? Wie oft wirft eine Person während des Umzugs Bonbons? Wie viele Bonbons wirft eine Person pro Wurf? Fermi-Aufgabe (vgl. Stunde zu Fermi-aufgaben)	Wie viel wiegt ein Bonbon? Wie viele Besucher hat der Rosenmontagsumzug? <u>Rechnung:</u> <u>Ergebnis:</u> ... Tonnen Bonbons werden geworfen. Im Durchschnitt erhält jeder Besucher Bonbons.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit GA ... Gruppenarbeit (max. 4 SuS pro Gruppe!)

FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Für eine 45 Min.-Stunde wird man nur die Bonbon-Aufgabe bearbeiten.

Für eine 90 Min.-Stunde kann man noch weitere Fermi-Aufgaben anfügen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 7 Min.	Anknüpfung an Erfahrungen der SuS: Wer geht zu einem Faschingsumzug? Wer kennt den Kölner Rosenmontagszug? Frage: <i>Wie viele kg oder Tonnen Bonbons werden beim Rosenmontagszug in Kölns geworfen?</i> <i>Wie viele Bonbons würdest du vermutlich erhalten, wenn du beim Rosenmontagszug am Straßenrand stehen würdest?</i> Schätzung: Wie viele kg Bonbons werden dort wohl geworfen? Anknüpfen an Vorerfahrungen: ist eine Fermi-Aufgabe. → Wie sind wir an frühere Fermi-Aufgaben herangegangen?	Evtl. Bild aus Internet zu Rosenmontagszug Tafel
2. Erarbeitung 1 GA 5 Min.	SuS überlegen in Gruppen Fragen, die zum Bearbeiten der Aufgabe beantwortet werden müssen: <i>Von wie vielen Wagen werden Bonbons geworfen?</i> <i>Wie viele Personen werfen auf so einem Wagen Bonbons?</i> <i>Wie lange dauert der Umzug?...</i>	
3. Ergebnis 1 FEU 8 Min.	Fragen der SuS werden an Tafel festgehalten und wenn möglich mit Hilfe der Folie „Zahlenmaterial“ beantwortet. Wie können wir die noch fehlenden Angaben herausfinden? → z.B. mit Waage, um Gewicht eines Bonbons zu ermitteln	Tafel: Sammlung der Fakten Folie „Zahlenmaterial“
4. Erarbeitung 2 PA bzw. GA 10 Min.	SuS ermitteln fehlende Anzahlen (z.B. Gewicht eines Bonbons, Anzahl der Bonbons pro Wurf...) SuS berechnen Gewicht der geworfenen Bonbons und Anzahl der erhaltenen Bonbons pro Besucher. Puffer für schnelle Gruppen: SuS überlegen, welche Angaben für die Pufferfrage (Menschenkette der Besucher) notwendig sind.	Bonbons, Waage Heft

5. Ergebnis 2 FEU 10 Min.	Vergleich der Ergebnisse und der gemachten Annahmen Bewertung der Ergebnisse Vergleich mit der „Lösung“ (150 Tonnen). Wodurch sind Abweichungen von der „Lösung“ entstanden?	
6. Neues Problem FEU 5 Min.	Kann eine Menschenkette aus allen Besuchern des Rosenmontagszugs das Gebiet der Stadt Köln umrunden? Welche Angaben benötigen wir? Verteilen von Schnüren, Kopie von Stadtplänen der Stadt Köln	Tafel Schnüre, Kopie von Stadtplan der Stadt Köln, (alternativ Atlanten) Meterstäbe
7. Erarbeitung PA 10 Min.	SuS lösen Aufgabe	Heft
8. Ergebnis FEU 5 Min.	Vergleich der Ergebnisse und der Methoden. Was bedeutet „durchschnittlich 23 Bonbons?“ - Reflexion über die Vorgehensweise - Zerlegung in kleinere Probleme - Parallelen zur Bonbon-Aufgabe	Tafel
9. optional weitere Aufgaben	Wie viele Bonbons werden in ... (am Ort der Schule) pro Jahr gegessen? Wie viele Kilogramm Bonbons passen ins Klassenzimmer? ... Oder auch von den SuS selbst ausgedachte Aufgaben	

Lehrerblatt

Sachanalyse und didaktische Reduktion:

Für die Berechnung der Endziffer eines Produkts genügt es, die Endziffern der Faktoren zu multiplizieren. Das kann man sehr leicht erkennen, wenn man eine schriftliche Multiplikation durchführt und die Endziffern jeweils rot markiert.

Da es nur endlich viele Endziffern gibt, müssen diese sich periodisch wiederholen, wenn man die Potenzen $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 \dots$ aufschreibt. Mit dieser Periode lässt sich die Endziffer von $7^{\text{Jahreszahl}}$ bestimmen.

Mathematisch geht das über Kongruenzenrechnung. In unserem Beispiel kann man das didaktisch so reduzieren, dass man sich eine Viererzahl in der Nähe der Jahreszahl sucht und dann von der zugehörigen Endziffer ausgehend bis zur Jahreszahl abzählt.

Als Erweiterung erkennt man, dass nur endlich viele Beispiele untersucht werden müssen

Basis hat Endziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Endziffern der Potenz	0	1	2, 4, 8, 6	3, 9, 7, 1	4, 6	5	6	7, 9, 3, 1	8, 4, 2, 6	9, 1

Es gibt also abgesehen von den trivialen Fällen nur die Periode 2 oder 4.

Ziele:

- erkennen, dass man schwierige Aufgaben durch Anwendung universeller Problemlösestrategien lösen kann.
- die Problemlösestrategien "Vereinfachen", "Systematisch vorgehen", "Genau beobachten" kennenlernen und erproben.
- Kongruenzrechnung auf einem sehr einfachen Niveau intuitiv erleben
- Kompetenzerleben

Material:

- keine Materialien
- Arbeit an Tafel und im Heft

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe ist im Hinblick auf das Kompetenzerleben der SuS besonders gut geeignet, weil sie auf den ersten Blick sehr schwierig zu sein scheint und trotzdem mithilfe geeigneter Problemlösestrategien lösbar ist.

Deshalb ist es wichtig, in der Motivationsphase den hohen Schwierigkeitsgrad der Aufgabe herauszuarbeiten. Der Landeswettbewerb Mathematik richtet sich an begabte SuS von Kl. 7 bis 9. Wer solche Aufgaben lösen kann, zählt also zur Zielgruppe des Wettbewerbs!

Bei der Formulierung der Problemlösestrategien sind folgende Vergleiche geeignet:

Strategie Vereinfachen

Wenn du über eine 2 m hohe Latte springen willst, dann kannst du das 100-mal versuchen und die Latte jedes Mal reißen - frustrierend.

Hochspringer gehen anders vor.

Sie beginnen mit einer 1 m hohen Latte und steigern die Höhe langsam. Das gibt viel Erfolg und führt wesentlich besser zum Ziel, weil man seine Technik dabei immer weiter verbessert.

Strategie Systematisch vorgehen

Beim Hochspringen könnte man die Latte mal 1,5 m dann 1,2m und dann 1,7 m hoch legen. Ist das sinnvoll?

Strategie Gut beobachten

Wenn ein Hochspringer die Latte reißt oder nicht reißt, dann gibt es dafür Gründe. Deshalb muss er genau beobachten, wie er vorgegangen ist.

Die SuS erarbeiten das Problem in zwei Schritten. Zuerst werden systematisch die Siebener-Potenzen aufgeschrieben bis die Wiederholung erkannt wird. Beim Berechnen der Endziffer stellt man fest, dass man nur die Endziffern der Faktoren berechnen muss. Für beide Erkenntnisse sind Farben und sauberes ausführliches Aufschreiben enorm hilfreich. Das sollte auch die erste Hilfe durch den Lehrer sein. Wenn erste Erkenntnisse vorliegen (Think) tauschen sich zwei aus (Pair) und fassen es dann in einer Gruppe oder im Plenum so zusammen, dass die anderen es verstehen können. Am Schluss wird das an der Tafel gesichert.

In der zweiten Erarbeitungsphase der SuS muss nun noch erkannt werden, dass man Vierergruppen bildet. **Hilfestellungen** (als Impuls an geeigneter Stelle)

$7^4 = \dots 1$, $7^8 = \dots 1$, $7^{12} = \dots 1$, ... Welche Eigenschaft haben die Hochzahlen?

Wie ist das mit der Hochzahl 2000?

Am Ende muss das Ergebnis gefeiert werden. Es kann jede Erkenntnis nicht genug gelobt werden!

Sicherheit im Verfahren erhalten die SuS durch die Wiederholung bzw. Erweiterung an weiteren ähnlichen Aufgaben.

Insgesamt sollen die Strategien in späteren Stunden aufgegriffen werden.

Tafelanschrieb

$7^1 = 7$ $7^2 = 49$ $7^3 = 343$ Nebenrechnung: $343 \cdot 7 = 2401$ Beobachtung: Für die letzte Ziffer ist immer nur das Produkt aus letzter Ziffer und 7 verantwortlich $3 \cdot 7 = 21$ $7^4 = \dots 1$ $7^5 = \dots 7$ $7^6 = \dots 9$ $7^7 = \dots 3$ $7^8 = \dots 1$	Problemlösestrategien Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{2017} ? Die Strategie Vereinfachen Beginne mit etwas Leichtem. Die Strategie Systematisch vorgehen z.B. schrittweise steigern - jedenfalls nicht wild durcheinander Die Strategie Gut beobachten Was funktioniert, was nicht, woran liegt es?	Hochzahl 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Endziffer 7 9 3 1 7 9 3 1 7 9 3 1 Ergebnis: Ist die Hochzahl durch 4 teilbar, dann ist die Endziffer 1, also $7^{2016} = \dots 1$ und somit $7^{2017} = \dots 7$

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Problemstellung und Motivation FEU 5 Min.	L erzählt vom Landeswettbewerb Mathematik und dessen Zielen L stellt das Problem vor: Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{2017} ? (Aufgabe des LWM) L Warum ist das eine schwierige Aufgabe? Warum kann man die Aufgabe nicht mit dem Taschenrechner lösen?	Tafel
2. Erarbeitung I FEU 15 Min.	Tafel: Die Strategie Vereinfachen L Wie könnte man diese Strategie auf unser Problem anwenden? Erwartete Antworten: 7^2 , 7^3 , 7^{10} Tafel: Die Strategie Systematisch vorgehen L Wie schreibst du die Siebener Potenzen auf? Erwartete Antwort: $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, ... Tafel: Die Strategie Gut beobachten Wenn du letzte Ziffern ausrechnest, dann solltest du gut beobachten, ob du irgendwelche Methoden findest, wie das besonders einfach geht.	Tafel
3. Erarbeitung II Think-Pair-Share 10 Min.	SuS erarbeiten mit den neuen Strategien erste Ergebnisse.	Heft
4. Sicherung und Reflexion FEU 10 Min.	Lehrer fasst an der Tafel die Ergebnisse zusammen. (Tafelanschrieb linke Tafel) bis den Schülern die Wiederholung auffällt.	Tafel / Heft
5. Problemlösung EA/PA 15 Min.	Arbeitsauftrag: Könnt ihr jetzt herausfinden, wie die letzte Ziffer von 7^{2017} lautet? Wendet evtl. wieder eine der gelernten Strategien an.	Heft
6. Sicherung 5 Min.	Tafelanschrieb Ergebnis	Tafel / Heft
7. Puffer	Aufgaben: - Wie lautet die Endziffer von 7^{3500}? - Wie lautet die Endziffer von 1^{2017}? - Wie lautet die Endziffer von 5^{2017}? - Wie lautet die Endziffer von 6^{2017}? Richtig schwierig: Kann man die Strategien bei jeder Aufgabe "Wie lautet die Endziffer von einer beliebigen Potenz" anwenden?	Heft

Lehrer-Blatt
Sachanalyse, didaktische Reduktion und Entscheidung:

Satz: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis: Durch vollständige Induktion oder mithilfe der Summation der beiden folgenden Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & k & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & (n-(k-1)) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array} \quad \blacksquare$$

Um diesen Satz rankt sich die Geschichte¹ des „kleinen GAUß“

(CARL FRIEDRICH GAUß, 1777 bis 1855, einer der bedeutendsten Mathematiker):

Die Schule in die GAUß im Alter von neun Jahren ging, hatte nur ein Klassenzimmer. Der Lehrer wollte die älteren Schüler unterrichten und stellte den jüngeren Schülern die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 99 zu addieren. Er hatte dabei die Absicht, sie mindestens eine Stunde lang still zu beschäftigen. Der kleine GAUß hatte die Lösung (4950) nach drei Minuten mithilfe eines Tricks errechnet. Wie hat er das gemacht?

Schreibt man die Aufgabe $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = ?$ wie vorstehend auf (die ersten drei Summanden und die letzten drei Summanden) können Sechstklässler sehr gut auf den Trick des Zusammenfassens geeigneter Summanden und das Ergebnis 4950 kommen:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \dots + (49 + 51) + 50 = 49 \cdot 100 + 50 = 4900 + 50$$

Kommentar zur Rechnung:

Es sind 99 Zahlen und zwar 49 Zahlenpaare („Pärchen“) mit der Summe 100

und die mittlere Zahl $(1 + 99) : 2 = 50$.

Diese Version hat den Vorteil, dass die Schüler dies selbst entdecken können. Die Herleitung über zwei Zeilen (s.o.) ist eleganter, die Formel ergibt sich direkt ohne weitere Überlegungen zur Anzahl der Paare und den „übrigen“ Summanden. Dieser Kniff liegt aber eher nicht auf der Hand.

Eine didaktische Entscheidung: Aus Gründen der Nachhaltigkeit, Einsicht und des Transfer-Spektrums halten wir es für sinnvoll, hier nicht auf die Formel oder den Zwei-Zeilen-Trick, s.o., abzuheben.

Die Berechnung von varierten Aufgaben „zu Fuß“ ist zwar nicht ganz so elegant, dafür ist die „Bodenhaftung“ gewährleistet. Der Fokus liegt auf dem Prozess der Erkundung von „+ ... +“:

- bestimme die Summanden-Anzahl
- bestimme die Pärchen-Anzahl und die Pärchen-Summe
- bestimme das „äußere“ und das „innere“ Pärchen
- bei ungerader Summanden-Anzahl: bestimme die mittlere Zahl („Mitte“)

Bei der Bestimmung dieser Einzelelemente treten Redundanzen auf. Die Angabe des äußeren und inneren Pärchens dient der Durchdringung des Sachverhalts. Man wird sich schließlich auf die Bestimmung der Pärchen-Anzahl, der Pärchen-Summe und ggf. der Mitte beschränken.

Die Aufgaben beschäftigen sich mit den beiden Typen $1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$ (Typ 1) und

$m + (m+1) + (m+2) + \dots + n = ?$ (Typ 2)

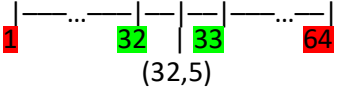
mit dem Lösungsansatz $= (1 + 2 + 3 + \dots + n) - (1 + 2 + 3 + \dots + (m-1))$

Ziele:

- die Problemlösestrategie „geschicktes Rechnen bei strukturierten Summen“ kennen lernen bzw. erproben, dabei ist der Lösungsprozess insbesondere die Identifizierung der beteiligten einzelnen Elemente wichtiger als das Ergebnis (!)
- die Problemlösestrategie „Aufspalten in Teilprobleme“ kennen lernen bzw. erproben
- die Bedeutung der beteiligten Zahlen (Anzahl der Summanden, Anzahl der Pärchen, Pärchensumme, Mitte) gut benennen und unterscheiden

¹ Die Geschichte ist nicht verbürgt. Aus didaktischen Gründen wird hier als letzter Summand die Zahl 99 und nicht – wie man oft liest – die Zahl 100 verwendet.

Tafelanschrieb und Aufgaben

Der Summentrick des kleinen Gauß ... 1.) $1+2+3+ \dots +97+98+99 = ?$ $1+2+ \dots +49+50+51+ \dots +98+99 = ?$... heißt „Pärchen bilden“ Summanden-Anzahl: 99 äußeres Pärchen: $1+99$	inneres Pärchen: $49+51$ Pärchen-Summe: 100 Pärchen-Anzahl: 49 Mitte: 50 $\dots = 49 \cdot 100 + 50 =$ $= 4900 + 50 = \underline{4950}$	2.) $1+2+3+ \dots +43+44+45 = ?$ Summanden-Anzahl: 45 äußeres Pärchen: $1+45$ Pärchen-Summe: 46 Mitte: $(1+45):2 = 23$ inneres Pärchen: $22+24$	Pärchen-Anzahl: 22 $1+2+ \dots +22+23+24+ \dots +44+45 =$ $22 \cdot 46 + 23 = 1012 + 23 = \underline{1035}$
3.) $1+2+3+ \dots +62+63+64 = ?$ 64 Summanden: 64 ist eine gerade Zahl, die Pärchenbildung geht auf! Pärchen-Summe: 65  Pärchen-Anzahl: 32 $\dots = 32 \cdot 65 = \underline{2080}$	4.) $10+11+12+ \dots +78+79+80 = ?$ Unbekanntes auf Bekanntes zurückführen (!): $= (1+2+3+ \dots +78+79+80) -$ $(1+2+3+ \dots +7+8+9) =$ $(40 \text{ Pärchen mit Summe } 81) -$ $(4 \text{ Pärchen mit Summe } 10 + \text{Mitte } 5) =$ $(40 \cdot 81) - (4 \cdot 10 + 5) = \dots = \underline{3195}$	Weitere Aufgaben vom Typ 1: $1+2+3+ \dots +42+43+44 = 22 \cdot 45 = \underline{990}$ $1+2+3+ \dots +57+58+59 = 29 \cdot 60 + 30 = \underline{1770}$ $1+2+3+ \dots +198+199+200 = 100 \cdot 201 = \underline{20100}$... Weitere Aufgaben vom Typ 2: $20+21+22+ \dots +42+43+44 = \dots = \underline{800}$ $36+37+38+ \dots +62+63+64 = \dots = \underline{1450}$... Weitere Aufgaben mit „schönem“ Ergebnis mithilfe der Tabelle erstellen ☺	

n=	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
n*(n+1)/2=	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276	300	325	351	378	406	435	465	496	528	561	595	630	666	703	741	780	820	861	903	946
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73					
990	1035	1081	1128	1176	1225	1275	1326	1378	1431	1485	1540	1596	1653	1711	1770	1830	1891	1953	2016	2080	2145	2211	2278	2346	2415	2485	2556	2628	2701					
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100								
2775	2850	2926	3003	3081	3160	3240	3321	3403	3486	3570	3655	3741	3828	3916	4005	4095	4186	4278	4371	4465	4560	4656	4753	4851	4950	5050								

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird der Lehrer mehr oder weniger lenken bzw. sich auf den Aufgabentyp 1 beschränken und die Phase Erarbeitung II weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L erzählt die Geschichte vom „kleinen GAUß“ und schreibt die Überschrift und die Initialaufgabe in geeignet suggestiver Form wie folgt an die Tafel: 1.) $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = ?$	Tafel
2. Erarbeitung I EA/PA 20 Min.	SuS - suchen nach dem Trick und dem Ergebnis L stellt ggf. weitere Aufgaben vom Typ $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = ?$ (z.B. $n=11 \rightarrow$ Probe durch aufsummieren) als Puffer, bis alle SuS die Initialaufgabe gelöst haben L lobt, beobachtet und berät sehr zurückhaltend	Heft
3. Plenum I Aufgabentyp 1: $1+2+ \dots +n = ?$ FEU 20 Min.	L sammelt die Erkenntnisse und schreibt an die Tafel $1 + 2 + \dots + 49 + 50 + 51 + \dots + 98 + 99 = ?$ (Zahlen der betreffenden Paare gleich färben bzw. mit Bögen verbinden) weiter: vgl. Tafelanschrieb L macht die Probe mit der Anzahl der Summanden mündlich. L und SuS lösen zusammen nach diesem Muster die Aufgaben 2.) und 3.) (Dokumentation bei 3.) verkürzt und unter Verwendung einer Skizze – vgl. Tafelanschrieb) und erkennen - die Fallunterscheidung nach n ungerade / gerade (die Mitte kommt als Summand vor / nicht vor) - die Mitte von zwei Zahlen als ihren Durchschnitt	Tafel / Heft
4. Erarbeitung II Aufgabentyp 2: $m+(m+1) + \dots + n = ?$ FEU/EA/PA 15 Min.	L stellt die Aufgabe 4.) $10 + 11 + 12 + \dots + 78 + 79 + 80 = ?$ SuS sollen erkennen, dass man diese (neue) Aufgabe auf bereits bekannte Aufgaben zurückführen kann (Strategie!)	Tafel / Heft
5. Übung EA / PA 30 Min.	L stellt je nach Situation weitere Aufgaben (vgl. Blatt Tafelanschrieb und Aufgaben) SuS bearbeiten diese selbständig, die Dokumentation kann jetzt knapp sein (vgl. Tafelanschrieb zu 4.)) L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Tafel / Heft

Lehrerblatt

Sachanalyse, didaktische Reduktion und Entscheidung:

Satz 1: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis: Durch vollständige Induktion oder mithilfe der Summation der beiden folgenden Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & k & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & (n-(k-1)) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Um diesen Satz rankt sich die (nicht verbürgte) Geschichte des „kleinen GAUß“

(CARL FRIEDRICH GAUß, 1777 bis 1855, einer der bedeutendsten Mathematiker):

Die Schule in der GAUß im Alter von neun Jahren ging, hatte nur ein Klassenzimmer. Der Lehrer wollte die älteren Schüler unterrichten und stellte den jüngeren Schülern die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er hatte dabei die Absicht, sie mindestens eine Stunde lang still zu beschäftigen. Der kleine Gauß hatte die Lösung (5050) nach drei Minuten mithilfe eines Tricks errechnet. Wie hat er das gemacht?

Schreibt man die Aufgabe etwas suggestiv auf, können auch Sechstklässler auf den Trick des Zusammenfassens geeigneter Summanden kommen:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \dots + (49 + 51) + 50 + 100 = 49 \cdot 100 + 50 + 100 = 4900 + 50 + 100 = 5050$$

Diese Version hat den Vorteil, dass die Schüler dies selbst entdecken können. Die Herleitung über zwei Zeilen (s.o.) ist eleganter, die Formel ergibt sich direkt ohne weitere Überlegungen zur Anzahl der Paare und den „übrigen“ Summanden. Dieser Kniff liegt aber eher nicht auf der Hand.

Eine didaktische Entscheidung: Aus Gründen der Nachhaltigkeit, Einsicht und des Transfer-Spektrums halten wir es für sinnvoll, hier nicht auf die Formel oder den Zwei-Zeilen-Trick abzuheben. Die Berechnung von variierten Aufgaben „zu Fuß“ ist zwar nicht ganz so elegant, dafür ist die „Bodenhaftung“ gewährleistet. Der Fokus liegt u.a. auf dem Prozess der Erkundung von „+ ... +“:

- bestimme die Summanden-Anzahl
- bestimme die Pärchen-Anzahl mit gleicher Pärchen-Summe
- bestimme die Mitte und das äußere und das innere Pärchen
- bestimme ggf. den „übrigen“ Summanden

Bei der Bestimmung dieser Einzelelemente treten Redundanzen auf. Die Bestimmung des inneren Pärchens ausgehend von der Mitte dient der Durchdringung des Sachverhalts und bietet eine Problemöglichkeit bezüglich der Pärchen-Summe.

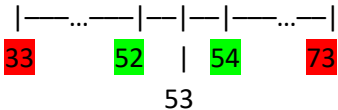
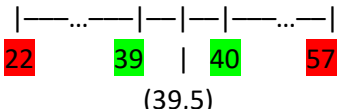
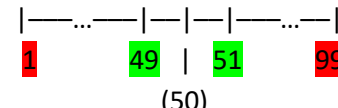
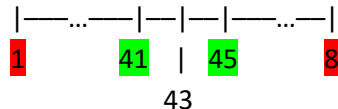
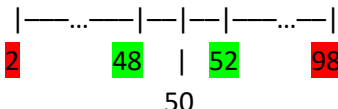
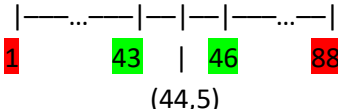
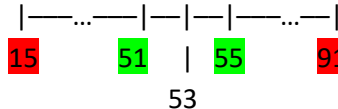
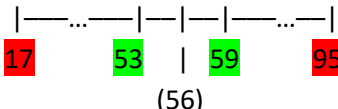
Im Hinblick auf die Variationsaufgaben hier noch der Satz 2, der sich aus Satz 1 durch einige Umformungen ergibt. b sei dabei der letzte Summand der arithmetische Reihe, $b := a + (n-1) \cdot d$.

Satz 2: $\sum_{k=1}^n (a + (k-1) \cdot d) = a \cdot n + d \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ bzw. $\dots = (a+b) \cdot \frac{b-a+d}{2d}$

Ziele:

- die Problemlösestrategie „geschicktes Rechnen bei strukturierten Summen“ kennen lernen bzw. erproben, dabei ist der Lösungsprozess insbesondere die Identifizierung der beteiligten einzelnen Elemente wichtiger als das Ergebnis (!)
- die Problemlösestrategie „Aufspalten in Teilprobleme“ kennen lernen bzw. erproben
- erkennen, dass zwischen a und b (einschließlich) $b - (a-1)$ Zahlen liegen und dass die Mitte der Zahlen a und b gleich $(a+b) : 2$ ist, das sind zwei sehr alltagstaugliche Erkenntnisse ☺
- die Bedeutung der beteiligten Zahlen gut benennen und unterscheiden können

Aufgaben - Lösungen

5.) $33+34+35+\dots+71+72+73 = \dots$ $73 - 32 = 41$ Summanden Pärchen-Summe: 106  53 Pärchen-Anzahl: $(41-1):2 = 20$ restlicher Summand: 53 $\dots = 20 \cdot 106 + 53 = \underline{2173}$	6.) $22+23+24+\dots+55+56+57 = \dots$ $57 - 21 = 36$ Summanden Pärchenbildung geht auf! Pärchen-Summe: 79  (39,5) Pärchen-Anzahl: $36:2 = 18$ $\dots = 18 \cdot 79 = \underline{1422}$	7.) $1+3+5+\dots+95+97+99 = \dots$ $99 - 49 = 50$ Summanden: $((99-1):2 = 49$ „Lücken“) Pärchenbildung geht auf! Pärchen-Summe: 100  (50) Pärchen-Anzahl: $50:2 = 25$ $\dots = 25 \cdot 100 = \underline{2500}$	8.) $1+3+5+\dots+81+83+85 = \dots$ $85 - 42 = 43$ Summanden $((85-1):2 = 42$ „Lücken“) Pärchen-Summe: 86  43 Pärchen-Anzahl: $(43-1):2 = 21$ restlicher Summand: 43 $\dots = 21 \cdot 86 + 43 = \underline{1849}$
9.) $2+4+6+\dots+94+96+98 = \dots$ $98 : 2 = 49$ Summanden Pärchen-Summe: 100  50 Pärchen-Anzahl: $(49-1):2 = 24$ restlicher Summand: 50 $\dots = 24 \cdot 100 + 50 = \underline{2450}$	10.) $1+4+7+\dots+82+85+88 = \dots$ $88 - 58 = 30$ Summanden: $(1+4+7+\dots+82+85+88$ $(88-1):3 \cdot 2 = 58$ „Lücken“) Pärchenbildung geht auf! Pärchen-Summe: 89  (44,5) Pärchen-Anzahl: $30:2 = 15$ $\dots = 15 \cdot 89 = \underline{1335}$	11.) $15+17+19+\dots+87+89+91 = \dots$ $91 - 14 = 77$ Summanden und „Lücken“ $(15+17+\dots+87+89+91)$ $77 - 38 = 39$ Summanden $((77-1):2 = 38$ „Lücken“) Pärchen-Summe: 106  53 Pärchen-Anzahl: $(39-1):2 = 19$ restlicher Summand: 53 $\dots = 19 \cdot 106 + 53 = \underline{2067}$	12.) $17+23+29+\dots+83+89+95 = \dots$ $95-16=79$ Summanden und „Lücken“ $(17+23+29+\dots+83+89+95)$ $79 - 65 = 14$ Summanden $((79-1):6 \cdot 5 = 65$ „Lücken“) Pärchenbildung geht auf! Pärchen-Summe: 112  (56) Pärchen-Anzahl: $14:2 = 7$ $\dots = 7 \cdot 112 = \underline{784}$

Tafelanschrieb

Der Summentrick des kleinen Gauß ... 1.) $1+2+3+ \dots +97+98+99+100 = ?$ $1+2+ \dots +49+50+51+ \dots +98+99+100 = ?$... heißt „Pärchen bilden“ Summanden-Anzahl: 100 äußeres Pärchen: (1;99)	inneres Pärchen: (49;51) Pärchen-Summe: 100 Pärchen-Anzahl: 49 restliche Summanden: 50 und 100 $\dots = 49 \cdot 100 + 50 + 100 =$ $= 4900 + 150 = \underline{5050}$	2.) $1+2+3+ \dots +85+86+87 = ?$ Summanden-Anzahl: 87 äußeres Pärchen: (1;87) Pärchen-Summe: 88 Mitte: $(1+87):2 = 44$ inneres Pärchen: (43;45)	Pärchen-Anzahl: 43 restlicher Summand: 44 $1+2+ \dots +43+44+45+ \dots +86+87 =$ $43 \cdot 88 + 44 = 3784 + 44 = \underline{3828}$
3.) $1+2+3+ \dots +72+73+74 = ?$ 74 Summanden: 74 ist eine gerade Zahl, die Pärchenbildung geht auf! Pärchen-Summe: 75 $\begin{array}{ccccccc} & \dots & & & & \dots & \\ \hline 1 & & 37 & & 38 & & 74 \end{array}$ (37,5) Pärchen-Anzahl: 37 $\dots = 37 \cdot 75 = \underline{2775}$	4.) $10+11+12+ \dots +78+79+80 = ?$ Summanden-Anzahl: $80 - (10-1) = 80 - 9 = 71$ Pärchen-Summe: 90 $\begin{array}{ccccccc} & \dots & & & & \dots & \\ \hline 10 & & 44 & & 46 & & 80 \end{array}$ 45 Pärchen-Anzahl: $(71-1):2 = 35$ restlicher Summand: 45 $\dots = 35 \cdot 90 + 45 = \underline{3195}$		

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird der Lehrer stärker oder weniger stark lenken bzw. die 5. Phase weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L erzählt die Geschichte vom „kleinen GAUß“ und schreibt die Überschrift und die Initialaufgabe in geeignet suggestiver Form wie folgt an die Tafel: 1.) $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = ?$	Tafel
2. Erarbeitung I EA/PA 20 Min.	SuS - suchen nach dem Trick und dem Ergebnis L stellt ggf. weitere Aufgaben vom Typ $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = ?$ ($n=10 \rightarrow$ Probe durch aufsummieren und $n=99$) als Puffer, bis alle SuS die Initialaufgabe gelöst haben L lobt, beobachtet und berät sehr zurückhaltend	Heft
3. Plenum I // Typ: natürliche Zahlen von 1 ab aufsummieren// FEU 20 Min.	L sammelt die Erkenntnisse und schreibt an die Tafel $1 + 2 + \dots + 49 + 50 + 51 + \dots + 99 + 100 = ?$ (Zahlen der betreffenden Paare gleich färben bzw. mit Bögen verbinden) weiter: vgl. Tafelanschrieb L macht die Probe mit der Anzahl der Summanden mündlich. L und SuS lösen nach diesem Muster die Aufgaben 2.) und 3.) (Dokumentation bei 3.) verkürzt und unter Verwendung einer Skizze – vgl. Tafelanschrieb) zusammen die Fälle $n = 87$ und $n = 74$ unter Einbezug des letzten Summanden bei der Pärchenbildung <i>Bemerkung: beim Einführungsbeispiel verfährt man wegen des „schönen“ Hunderters etwas anders.</i> und erkennen - die Fallunterscheidung nach n ungerade / gerade (die Mitte kommt als Summand vor / nicht vor) - die Mitte von zwei Zahlen als ihren Durchschnitt	Tafel / Heft
4. Plenum II // Typ: natürliche Zahlen von einer beliebigen Zahl ab aufsummieren// EA/PA 15 Min.	L stellt die Aufgabe 4.) $10 + 11 + 12 + \dots + 78 + 79 + 80 = ?$ L und SuS lösen nach obigem Muster gemeinsam (vgl. Tafelanschrieb) und erkennen dabei - dass zwischen a und b (einschließlich) $b - (a-1)$ Zahlen liegen	Tafel / Heft
5. Erarbeitung II // Typ gerade/ungerade Zahlen aufsummieren u.a. // EA / PA 30 Min.	L stellt je nach Situation weitere Variationsaufgaben SuS bearbeiten diese selbständig, die Dokumentation kann jetzt knapper werden und vergleichen ihre Lösungen mit dem aushängenden Lösungsblatt L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Tafel / Heft Blatt Aufgaben – Lösungen

Lehrerblatt
Sachanalyse

ANNA-Zahlen sind Zahlen der Form $XYXX$, wobei X, Y die Ziffern $0 \dots 9$ sind und $X \neq Y$. Man kann sie auch so schreiben: $1000x + 100y + 10y + x = 1001x + 110y$.

Für eine ANNA-Aufgabe $XYXX - YXXY$ gilt demnach $1001x + 110y - 1001y - 110x = 891x - 891y = 891(x-y)$ mit $x > y$. Da 891 durch 9 teilbar ist, ist die Quersumme durch 9 teilbar. Da $x > y$ ist, ist die Quersumme (von hinten berechnet): $(x-y) + (10+y-x) + (10+y-x-1) + (x-y-1) = 10+10-1-1 = 18$.

Aus $891(x-y)$ kann man alle möglichen ANNA-Aufgaben mit dem gleichen Ergebnis konstruieren.

x-y	1	2	3	...	9
(x;y)	(1;0),(2;1),...,(9;8)	(2;0),(3;1),...,(9;7)	(3;0)...	...	(9;0)
Anzahl	9	8	7	...	1
Ergebnis	891	1782	2673		8019

Es sind also insgesamt $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ ANNA-Aufgaben möglich und es gibt 9 verschiedene Ergebnisse.

Für jedes der 10 möglichen x gibt es 9 mögliche y , weil x und y verschieden sein müssen. Insgesamt gibt es also $9 \cdot 10 = 90$ ANNA-Zahlen

Didaktische Reduktion

Die Aufgaben können von den SuS auf keinen Fall in der oben dargestellten Form gelöst werden.

Es wird vielmehr in Worten argumentiert werden. Hier hilft es mit Farben exemplarisch die Überlegungen hervorzuheben.

Es ist aber unbedingt darauf zu achten, dass man systematisch vorgeht. Dieses Vorgehen ist das zentrale Lernziel und sollte bei der Ergebnissicherung herausgearbeitet werden.

Mündliche Zusatzaufgabe für besonders schnelle SuS:

Warum ist die Ergebniszahl immer ein Vielfaches von 891?

Zur Lösung dieser Aufgabe hilft z.B. eine Stellentafel

T	H	Z	E
OO	OOO	OOO	OO
+1000	-100	-10	+1
OOO	OO	OO	OOO
Insgesamt ist 3223 um $1000-100-10+1=891$ größer als 2332			

Das führt man mit mehreren ANNA-Aufgaben durch und erkennt das Prinzip.

Hilfen während der Einzelarbeit:

Immer wieder darauf hinweisen, dass man nur X ODER Y verändert (Systematisches Vorgehen).

Hinweis auf Quersumme.

Hinweis auf die beiden Pärchen (Zehner; Einer) und (Tausender; Hunderter).

Rechnen mit Entdeckungen: Anna-Zahlen

Aufgabe 1

Berechne:

5335	8228	9009
<u>- 3553</u>	<u>- 2882</u>	<u>- 990</u>

Aufgabe 2

Aufgaben wie in Aufgabe 1 heißen ANNA-Aufgaben. Was fällt dir am Ergebnis auf? Überprüfe deine Vermutungen an zwei weiteren ANNA-Aufgaben, die du dir ausdenkst.

Aufgabe 3

Welche ANNA-Aufgaben haben das Ergebnis 2673?

Gibt es Anna Aufgaben mit dem Ergebnis 3674? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 4

Bestimme alle möglichen Ergebnisse, die bei ANNA-Aufgaben herauskommen können.

Weiteres zum Forschen (Gehe systematisch vor!):

1. Bestimme zu jeder möglichen Lösung einer ANNA-Aufgabe, alle ANNA-Aufgaben, die dieses Ergebnis haben.
2. Wie viele verschiedene ANNA-Zahlen gibt es?

Lösungen

1)

5335	8228	9009
<u>- 3553</u>	<u>- 2882</u>	<u>- 990</u>
1782	5346	8019

2)

Erkenntnis: Die ersten beiden Ziffern ergeben zusammen 8, die letzten beiden 10. Wenn man z.B. $8-2$ rechnet und dann $12-8$, dann ist die Summe der Ergebnisse $12-8+8-2 = 10$, also gerade die 10, die man sich für die Rechnung geborgt hat. Quersumme ist 18. Die erste Ziffer ist um 1 kleiner als die letzte, die zweite Ziffer ist um 1 kleiner als die dritte Ziffer. Das liegt am Übertrag.

3)

$X-Y = 3$. Es gehen also $3003 - 330$, $4114 - 1441$, $5224 - 2552$, $6336 - 3663$, $7447 - 4774$, $8558 - 5885$, $9669 - 6996$.

Das Ergebnis 3674 ist nicht möglich (z.B. wegen der Quersumme 18). Es müsste $X-Y=4$ sein und $10+Y-X=7$. Die SuS können noch nicht die beiden Gleichungen addieren mit dem Ergebnis $10=11$, aber sie können an Beispielen argumentieren: Wenn z.B. $9 - 5 = 4$, dann ist $15 - 9 = 6$ und nicht 7.

4)

Durch systematisches Ausprobieren ($Y = 0$, $X = 1; 2; 3; \dots; 9$) erhält man 891 , $2 \cdot 891$, $3 \cdot 891$, ..., $9 \cdot 891$. Nun kann man z.B. argumentieren, dass es nur auf die Differenz von X und Y ankommt.

Zusatzaufgaben – siehe Sachanalyse auf dem Lehrerblatt.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

4. und 5. können je nach Verlauf weggelassen werden.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg / Vorbereitung der Einzelarbeit FEU 15 Min.	L stellt das Problem vor L erklärt wie man systematisch vorgeht, indem er z.B. alle zweistelligen Zahlen mit der Quersumme 9 mit den SuS bestimmt. An dieser Stelle kann man auf die Besonderheit aller dieser Zahlen eingehen.	Tafel
2. Erarbeitung EA (evtl. auch PA) 30 Min.	SuS bearbeiten das Arbeitsblatt Hilfen auf dem Lehrerblatt beachten. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend L sammelt Ergebnisse der SuS, auch falsche Ergebnisse	AB
3. Sicherung und Reflexion FEU 15 Min.	L und SuS tauschen sich über die Beobachtungen aus. Formulierung der Ergebnisse durch die SuS, auch ungeschickte Formulierungen zulassen. Falsche Ergebnisse widerlegen – trotzdem die Idee loben und den richtigen Anteil herausarbeiten	Tafel / Heft ?
4. ab hier optional FEU oder EA 15 Min.	Zusatzaufgaben (siehe auch Lehrerblatt)	Stellenwert-tafel mit Chips
5. Sicherung und Reflexion FEU 15 Min.	Formulierung der Ergebnisse an der Tafel	Tafel / Heft ?

Lehrerblatt
Sachanalyse und didaktische Reduktion:

Für einen beschränkten konvexen Polyeder (Vielflächner) mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gilt die Polyederformel von EULER: $e + f - k = 2$.

Der Beweis ist (leider) nicht trivial und deshalb nicht Gegenstand der vorliegenden Stunde.

Im Sinne einer didaktischen Reduktion wird die Konvexitätsvoraussetzung zunächst unterschlagen. Sie kann nach der Erarbeitung kurz thematisiert werden. Von der Beschränktheit geht man implizit aus.

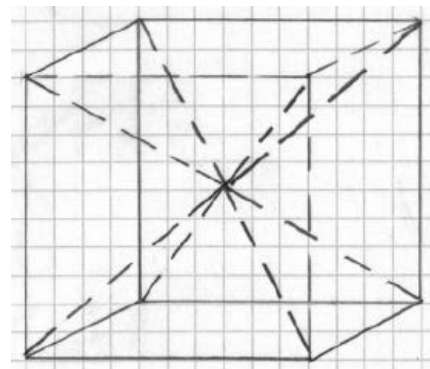
Die Voraussetzung der Konvexität ist „stark“ hinreichend.

Oder anders gesagt: Polyeder, für die die Euler-Formel nicht gilt, muss man „mit der Lupe suchen“.

Beispiel für einen nicht-konvexen Polyeder, für den die Euler-Formel nicht gilt:

Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt ist $k = 20$, $e = 9$ und $f = 12$.

→ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist nicht erfüllt.



Man kann auf dem Schüler-Arbeitsblatt mit einem * wie folgt ergänzen:

// Er hat für alle Polyeder* eine Formel herausgefunden ... (*ohne einspringende Ecken) //

Lösungen:

zu den sechs konvexen Polyedern des Arbeitsblattes:

	„Haus“	Dreiecks- prisma	Dreiecks- pyramide	Pyramiden- stumpf	Würfel mit ab- geschnittener Ecke	Doppel- pyramide
$k =$	15	9	6	12	15	24
$e =$	10	6	4	8	10	10
$f =$	7	5	4	6	7	16

Ziele:

- die Problemlösestrategie „aus Beispielen eine Vermutung erzeugen“ kennen lernen bzw. erproben
- das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln

Material:

- Schüler-Arbeitsblatt
- viele verschiedene Polyeder-Modelle, z.B. auch Verpackungen (Prismen, Pyramiden, Pyramidenstumpf, Würfel mit aufgesetzter quadratischer Pyramide)

Didaktischer Kommentar

Im Hinblick auf eine möglichst einfache Entdeckung des Sachverhalts $e + f - k = 2$

(e ... Anzahl der Ecken, f ... Anzahl der Flächen und k ... Anzahl der Kanten)

ist dieser auf dem Schüler-Arbeitsblatt umformuliert zu $k = [e + f - 2]$.

Formeln kennen die Schüler z.B. vom Rechteck mit den Seitenlängen a und b und dem Umfang U:

$$U = 2 \cdot (a + b)$$

Das erste Beispiel des Schülerblattes („Haus“ = Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma, also ein Haus mit Satteldach) soll gemeinsam bearbeitet werden um sicherzustellen, dass alle Schüler wissen, was zu tun ist. Das ist grundsätzlich ein ganz wichtiger Punkt.

Für das „Haus“ ergibt sich: $k = 15$; $e = 10$ und $f = 7$.

Am Beispiel des Rechtecksumfangs erläutert der Lehrer, worum es jetzt geht:

Angenommen, man kennt die Formel

$U = 2 \cdot (a + b)$ nicht. Könnte man sie mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten?

U	a	b
14	5	2
20	5	5
22	9	2
110	50	5

Eventuell kann man noch ein zweites Beispiel machen.

Kann man mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten, wie man H mithilfe von a und b errechnen kann?

Lösung: $H = (a \cdot b) : 2$

Interpretation: die Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b oder Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den „Seiten“ (=Katheten) a und b.

H	a	b
6	4	3
24	6	8
35	7	10
49,5	9	11

Erfahrungsgemäß finden bei dieser Hinführung viele Unterstufenschüler die Eulersche Polyederformel mithilfe der vier Zahlenbeispiele selbständig. Wenn nicht, kann der Lehrer nach einiger Zeit den folgenden Tipp geben:

„Trage in die freie Spalte einmal die Summe $e + f$ ein. Fällt dir jetzt etwas auf?“

Ganz wichtig ist, dass der Lehrer umher geht und alle Zahleneintragungen der Schüler auf dem Arbeitsblatt kontrolliert. Wenn diese nicht stimmen, kann man die Formel nicht finden!

Die „schnelleren“ SuS bestätigen die gefundene Formel an den beiden letzten Beispielen des Arbeitsblattes und/oder an bereitgestellten Polyeder-Modellen (Binnendifferenzierung).

Die Polyeder-Formel von EULER

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind.
 Beispiele für Polyeder sind Quader, Prismen oder Pyramiden.
 Keine Polyeder sind z.B. Zylinder oder Kegel.

LEONHARD EULER (1707-1783) ist einer der berühmtesten Mathematiker.

Er hat für alle Polyeder eine Formel herausgefunden und begründet,
 wie man die Anzahl der Kanten (k) mithilfe
 der Anzahl der Ecken (e) und der Anzahl der Flächen (f) ausrechnen kann.

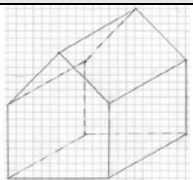
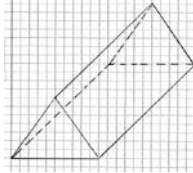
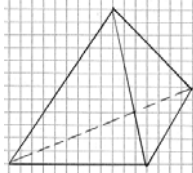
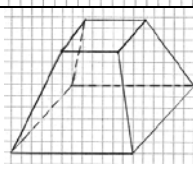
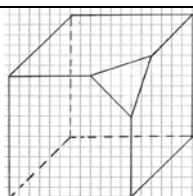
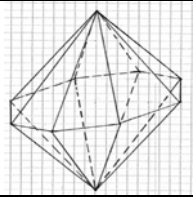
(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EULER_HARLUQ.jpg)



Fülle zunächst die Tabelle für die ersten vier angegebenen Beispiele **aus**.

Findest du diese Formel mithilfe der Beispiele in der Tabelle auch?

k = ...

Polyeder	Schrägbild-Skizze	k ... Anzahl der Kanten	e ... Anzahl der Ecken	f ... Anzahl der Flächen	
„Haus“					
Dreiseitiges Prisma					
Dreiecks-Pyramide					
Pyramidenstumpf					
Würfel mit abgeschnittener Ecke					
Doppel-pyramide					

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 15 Min.	L stellt das Problem vor L und SuS bearbeiten das erste Beispiel („Haus“ = <i>Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma</i>) gemeinsam L erläutert am Beispiel des Rechtecksumfangs (ggf. an einem weiteren Beispiel – vgl. didaktischer Kommentar), dass jetzt mithilfe von Zahlenbeispielen die Formel gefunden werden soll	AB Polyeder-Modelle Tafel
2. Erarbeitung I EA/PA 30 Min.	SuS - bearbeiten drei weitere Beispiele - machen sich auf die Suche nach der Formel - nehmen beim Abzählen von Ecken, Kanten und Flächen (je nach räumlichem Vorstellungsvermögen) die bereit gestellten Körper zur Hand oder zählen am Schrägbild ab. L gibt den Tipp: Ecken und Kanten unterschiedlich färben! L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	AB Polyeder-Modelle
3. Erarbeitung II (=Puffer) EA/PA 10 Min.	Die „schnelleren“ SuS bestätigen die gefundene Formel an den beiden letzten Beispielen des Arbeitsblattes und/oder an bereitgestellten Polyeder-Modellen (Binnendifferenzierung).	AB Polyeder-Modelle
4. Sicherung und Reflexion FEU 5 Min.	L und SuS tauschen sich über den Suchprozess und die Einzelergebnisse aus. L berichtet von seinen Beobachtungen (s.o.)	
5. Weitere Problemstellung FEU und EA/PA 15 Min.	SuS untersuchen den <i>Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt</i> und erkennen: → die Formel gilt nicht mehr! Modifikation des Textes auf dem AB: // Er hat für alle Polyeder* eine Formel herausgefunden ... (*ohne einspringende Ecken) //	Tafel-zeichnung

Lehrerblatt
Sachanalyse und didaktische Reduktion:

Für einen beschränkten konvexen Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Flächen gilt:

$$e + f - k = 2.$$

Der Beweis ist (leider) nicht trivial und deshalb nicht Gegenstand der vorliegenden Stunde.

Im Sinne einer didaktischen Reduktion wird die Konvexitätsvoraussetzung zunächst unterschlagen. Sie wird erst im zweiten Teil der Stunde eingeführt. Von der Beschränktheit geht man implizit aus.

Bemerkung: Für viele andere Körper ohne Polyeder- oder Konvexitätseigenschaft ist diese Gleichung auch erfüllt, s.u.

Hat man die Formel gefunden und bestätigt (vgl. Unterrichtsverlauf), kann man die Nicht-Polyeder Zylinder, Kegel und Kugel untersuchen.

Zylinder: $k = 2$; $e = 0$; $f = 3 \rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist nicht erfüllt.

Kegel: $k = 1$; $e = 1$ (Spitze = Ecke?); $f = 2 \rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist erfüllt.

Kugel: $k = 0$; $e = 0$; $f = 1 \rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist nicht erfüllt.

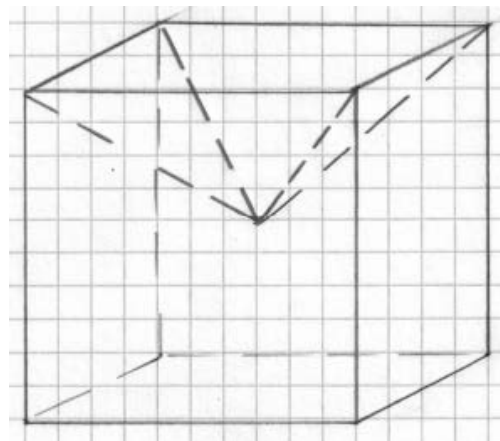
Die Voraussetzung der Konvexität ist „stark“ hinreichend.

Oder anders gesagt: Polyeder, für die die Formel nicht gilt, muss man „mit der Lupe suchen“.

Beispiele nicht-konvexer Polyeder:

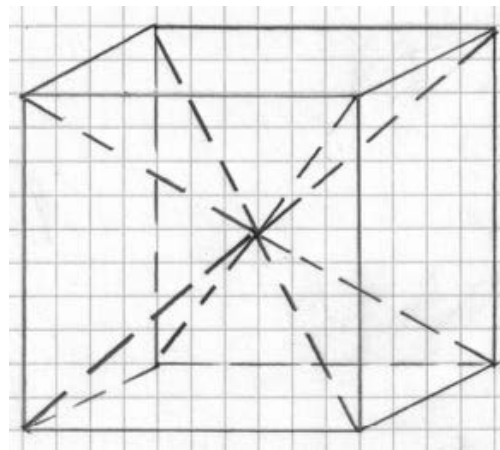
K1: Für einen *Würfel mit ausgefräster quadratischer Pyramide mit Spitze im Würfelmittelpunkt* ist $k = 16$, $e = 9$ und $f = 9$.

$\rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist „noch“ erfüllt.



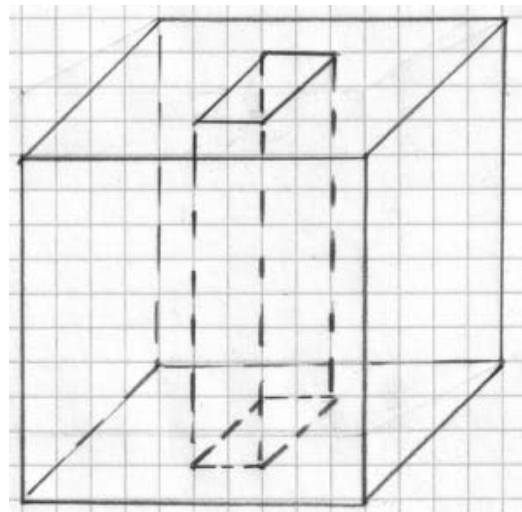
K2: Für einen *Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt* ist $k = 20$, $e = 9$ und $f = 12$.

$\rightarrow$ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist nicht mehr erfüllt.



K3: Für einen Würfel mit quaderförmigem Loch ist $k = 24$,
 $e = 16$ und $f = 10$.

→ Die Gleichung $k = e + f - 2$ ist „wieder“ erfüllt.



Lösungen:

zu den vier Körpern des Arbeitsblattes und weiteren Beispielen:

* zu einer quadratischen Pyramide ** Würfel mit aufgesetzter quadratischer Pyramide

	„Haus“	Dreiecks- prisma	Quadratische Pyramide	Pyramiden- stumpf *	Sechsecks- prisma	Oktaeder	„Häusle“ **
$k =$	15	9	8	12	18	12	16
$e =$	10	6	5	8	12	6	9
$f =$	7	5	5	6	8	8	9

Ziele:

- die Problemlösestrategie „aus Beispielen eine Vermutung erzeugen“ kennen lernen bzw. erproben
- das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln
- sich an das Zeichnen von Schrägbildern annähern

Material:

- Schüler-Arbeitsblatt
- viele verschiedene Polyeder (Prismen, Pyramiden, Pyramidenstumpf, Würfel mit aufgesetzter quadratischer Pyramide)
- Schrägbilder der drei genannten nicht-konvexen Körper K1, K2 und K3 (Folie, Datei ...)

Didaktischer Kommentar

Im Hinblick auf eine möglichst einfache Entdeckung des Sachverhalts $e + f - k = 2$

(e ... Anzahl der Ecken, f ... Anzahl der Flächen und k ... Anzahl der Kanten)

ist dieser auf dem Schüler-Arbeitsblatt umformuliert zu $k = [e + f - 2]$.

Formeln kennen die Schüler z.B. vom Rechteck mit den Seitenlängen a und b und dem Umfang U:

$$U = 2 \cdot (a + b)$$

Das erste Beispiel des Arbeitsblattes („Haus“ = Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma, ein Haus mit Satteldach) soll gemeinsam bearbeitet werden um sicherzustellen, dass alle Schüler wissen, was zu tun ist. Das ist grundsätzlich ein ganz wichtiger Punkt.

Für das „Haus“ ergibt sich: $k = 15$; $e = 10$ und $f = 7$.

Am Beispiel des Rechtecksumfangs erläutert der Lehrer, worum es jetzt geht:

Angenommen, man kennt die Formel

$U = 2 \cdot (a + b)$ nicht. Könnte man sie mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten?

U	a	b
14	5	2
20	5	5
22	9	2
110	50	5

Eventuell kann man noch ein zweites Beispiel machen.

Kann man mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten, wie man H mithilfe von a und b errechnen kann?

Lösung: $H = (a \cdot b) : 2$ (Interpretation: die Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b)

H	a	b
6	4	3
24	6	8
35	7	10
49,5	9	11

Erfahrungsgemäß finden bei dieser Hinführung viele Unterstufenschüler die Eulersche Polyederformel mithilfe der Zahlenbeispiele selbständig. Wenn nicht, kann der Lehrer nach einiger Zeit den folgenden Tipp geben:

„Trage in die freie Spalte einmal die Summe $e + f$ ein. Fällt dir jetzt etwas auf?“

Ganz wichtig ist, dass der Lehrer umher geht und alle Zahleneinträge der Schüler auf dem Arbeitsblatt kontrolliert. Wenn diese nicht stimmen, kann man die Formel nicht finden!

Nicht nur für Unterstufenschüler könnte verwirrend sein, dass man aus dem Eulerschen Polyedersatz nicht folgern kann (das ist die so genannte Kehrsatzproblematik – es wird angenommen, die Umkehrung eines Satzes in der Form der Kontraposition ist automatisch gültig):

„Wenn ein Körper kein konvexes Polyeder ist, dann gilt die Formel $k = e + f - 2$ nicht.“

Der Lehrer könnte auf den folgenden Sachverhalt hinweisen:

Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar.

Wenn eine Zahl nicht durch 4 teilbar ist, könnte sie trotzdem durch 2 teilbar sein, z.B. 6 oder 10.

Sollte man zum Schluss noch Zeit haben, kommt das folgende Partner-Knobel-Spiel oft gut an:

Schüler A überlegt sich eine Formel „mit a und b“. Die Formel sollte nicht zu kompliziert sein.

Zum Beispiel: $T = a + b - 5$ oder $T = 5 \cdot a \cdot b$ oder $T = a \cdot b + a$.

Schüler A trägt vier Zahlenbeispiele zu seiner Formel in eine Tabelle ein, s.o.

Schüler B errät die Formel mithilfe der Zahlenbeispiele.

Unter uns: Man müsste natürlich besser allgemein formulieren „eine mögliche Formel“, denn es gibt ja unendlich viele Terme $T(a,b)$ zu vier vorgegebenen Auswertungen.

Die Polyeder-Formel von EULER

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind.

Beispiele für Polyeder sind Quader, Prismen oder Pyramiden.

Keine Polyeder sind z.B. Zylinder oder Kegel.

LEONHARD EULER (1707-1783) ist einer der berühmtesten Mathematiker.

Er hat für alle Polyeder eine Formel herausgefunden und begründet,
wie man die Anzahl der Kanten (k) mithilfe
der Anzahl der Ecken (e) und der Anzahl der Flächen (f)
ausrechnen kann.

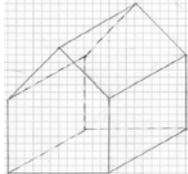


(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EULER_HARLUQ.jpg)

Fülle zunächst die Tabelle für die vier angegebenen Beispiele **aus**.

Findest du diese Formel mithilfe der Beispiele in der Tabelle auch?

$k = \dots\dots\dots$

Körper	Hand-Skizze	k ... Anzahl der Kanten	e ... Anzahl der Ecken	f ... Anzahl der Flächen	
„Haus“					
Dreiseitiges Prisma					
Quadratische Pyramide					
Pyramiden- stumpf					

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 15 Min.	L stellt das Problem vor L und SuS bearbeiten das erste Beispiel („Haus“ = <i>Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma</i>) gemeinsam L erläutert am Beispiel des Rechtecksumfangs (ggf. an einem weiteren Beispiel – vgl. didaktischer Kommentar), dass jetzt mithilfe von Zahlenbeispielen die Formel gefunden werden soll	AB Körpermodelle Tafel
2. Erarbeitung I EA/PA 30 Min.	SuS - bearbeiten drei weitere Beispiele - machen sich auf die Suche nach der Formel - nehmen beim Abzählen von Ecken, Kanten und Flächen (je nach räumlichem Vorstellungsvermögen) die bereit gestellten Körper zur Hand oder zählen am Schrägbild ab L gibt den Tipp: Ecken und Kanten unterschiedlich färben! L ist bei den Schrägbildzeichnungen mit ersten Versuchen zufrieden! L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	AB Körpermodelle
3. Erarbeitung II (=Puffer) EA/PA 10 Min.	SuS produzieren (je nach Arbeitstempo) ein oder mehrere weitere Beispiele und bestätigen die gefundene Formel	AB Körpermodelle
4. Sicherung und Reflexion FEU 5 Min.	L und SuS tauschen sich über den Suchprozess aus L berichtet von seinen Beobachtungen (s.o.) L und SuS testen die Formel $k = e + f - 2$ für die Nicht-Polyeder Zylinder, Kegel und Kugel	Tafel / Heft?
5. Weitere Problemstellung FEU 15 Min.	L führt die Voraussetzung der Konvexität ein („keine einspringenden Ecken oder Löcher“) L und SuS untersuchen gemeinsam den Körper <i>Würfel mit ausgefräster quadratischer Pyramide mit Spitze im Würfelmittelpunkt</i> → die Formel gilt noch!	Tafel / Heft?
6. Erarbeitung III EA/PA 15 Min.	SuS suchen nach nicht-konvexen Körpern, bei denen die Formel nicht mehr gilt - <i>Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt</i> → die Formel gilt nicht mehr! - <i>Würfel mit quaderförmigem Loch</i> → die Formel gilt „wieder“! L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Bilder dieser Körper (vgl. Lehrerblatt) zeigen Tafel / Heft?

Sachanalyse

Definition: Regelmäßige Polyeder (auch: platonische Körper) sind konvexe Körper, bei denen an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen und deren Oberfläche aus kongruenten regelmäßigen Vielecken besteht.

Regelmäßige n-Ecke haben gleiche Seitenlängen und Innenwinkel α . Es gilt:

n =	3	4	5	6	> 6
$\alpha =$	60°	90°	108°	120°	>120°

Zwei Fragen:

Welche regelmäßigen Polyeder gibt es? Wie kann man sicher sein, dass es keine weiteren gibt? Durch Probieren findet man die **fünf regelmäßigen Polyeder**. Auf einen formalen Beweis der Existenz wird hier verzichtet.

Die griechischen Vorsilben benennen die Anzahl der Flächen:

tetra = vier;

hexa = sechs;

okta = acht;

dodeka = zwölf;

ikosa = zwanzig

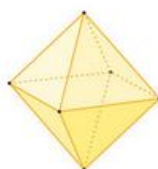
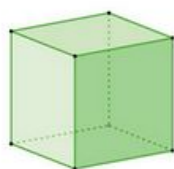
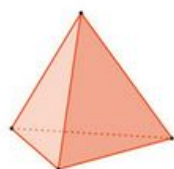
Tetraeder

Hexaeder

Oktaeder

Dodekaeder

Ikosaeder



Dass dies alle sind, wird im Folgenden anschaulich begründet. Dabei sei a die Anzahl der regelmäßigen n -Ecke, die eine räumliche Ecke bilden, offensichtlich ist $a \geq 3$.

$n = 3$: Man kann entweder je $a = 3$ gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen ($\rightarrow$ Tetraeder) oder je $a = 4$ ($\rightarrow$ Oktaeder) oder je $a = 5$ ($\rightarrow$ Ikosaeder) gleichseitige Dreiecke.

$a = 6$ gleichseitige Dreiecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 4$: Man kann nur je $a = 3$ Quadrate zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen ($\rightarrow$ Hexaeder = Würfel); $a = 4$ Quadrate aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 5$: Man kann nur je $a = 3$ regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen ($\rightarrow$ Dodekaeder), es ist $3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$.

$n = 6$: $a = 3$ regelmäßige Sechsecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

Alle anderen Kombinationen von a und n führen zu Überlappungen und scheiden damit ebenfalls als Möglichkeiten aus.

Eine dritte Frage:

Sind in der Definition die Forderungen „konvex“ und „an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen“ notwendig?

Antwort: ja. Ansonsten würde man weitere regelmäßige Körper bekommen:

- Man denke sich ausgehend vom Ikosaeder eine der Ecken einspringend nach innen, dieser „Dellen-Ikosaeder“ besteht nach wie vor aus zwanzig gleichseitigen Dreiecken und an jeder Ecke treffen gleich viele Dreiecke aufeinander.

- Man denke sich zwei Tetraeder an je einer der Flächen aufeinander geklebt, der „Doppel-Tetraeder“ besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, ist konvex, aber an den Ecken treffen entweder drei oder vier Dreiecke zusammen.

Lehrerblatt

Didaktischer Kommentar

Der Charme dieses Vorhabens liegt darin, dass beim Tun

- die fünf regelmäßigen Polyeder gefunden werden können und
- die Grenzen der Möglichkeiten erfahrbar werden.

Für Unterstufenschüler gibt man sich mit dem Nachweis der Existenz durch die Konstruktion zufrieden. Beim Arbeitsblatt wird nur der Hauptstrang des Gedankengangs dokumentiert.

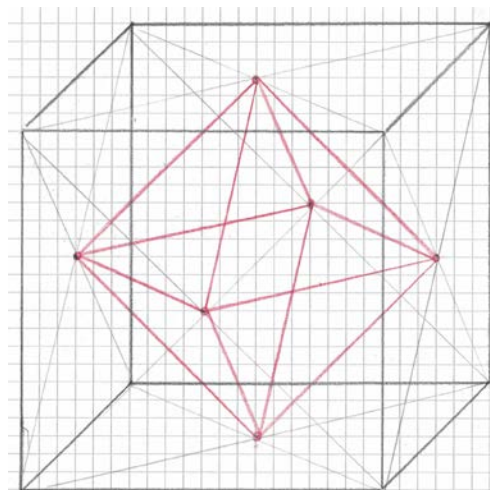
Die Suche nach den regelmäßigen Polyedern ist in natürlicher Weise **selbstdifferenzierend**:

- beim Ausloten und Verbalisieren der Grenzen der Möglichkeiten
- beim Finden des Doppel-Tetraeders (den Dellen-Ikosaeder darf der Lehrer mit in die Diskussion einbringen)

Reguläre Polyeder sind zueinander dual. Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Seitenflächen, so erhält man wieder einen regelmäßigen Polyeder:

Tetraeder $\rightarrow$ Tetraeder; Hexaeder $\rightarrow$ Oktaeder;
 Oktaeder $\rightarrow$ Hexaeder; Ikosaeder $\rightarrow$ Dodekaeder;
 Dodekaeder $\rightarrow$ Ikosaeder

Die Schrägbild-Zeichnung des Oktaeders im Würfel lässt sich gut bewerkstelligen. Alle anderen Übergänge könnte man bei der Betrachtung der regulären Körper immerhin gedanklich nachvollziehen.



Ziele:

- die Problemlösestrategien
 - ein Problem in Teilprobleme aufspalten“
 - alle Fälle der Reihe nach abhandeln
 - systematisches Probieren
- kennen lernen bzw. erproben
- das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln
- Freude an der Ästhetik von Figuren und an der Aufdeckung von Zusammenhängen empfinden

Material:

- Steckerle von regelmäßigen n-Ecken ($n = 3; 4; 5; 6$) in ausreichender Anzahl
- Arbeitsblatt



Regelmäßige Polyeder

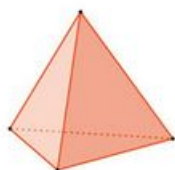
Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

Regelmäßige Polyeder

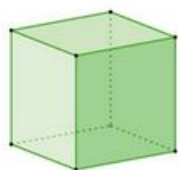
- haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
- haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
- haben keine einspringenden Ecken.

Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.

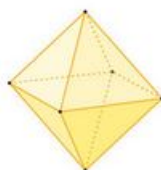
Tetraeder



Hexaeder



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. **Trage die Zahlen ein.**

tetra = ...

hexa = ...

okta = ...

dodeka = ...

ikosa = ...

Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder? Fülle die Text-Lücken aus.

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen
und erhält das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen
und erhält dann das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen
und erhält dann das

Fügt man jedoch gleichseitige Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene,
und man erhält keinen mehr.

Das gleiche gilt für Quadrate oder regelmäßige Sechsecke.

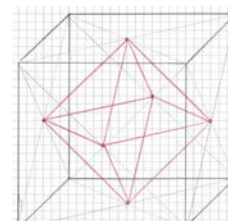
Man kann je drei zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen
und erhält das

Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

Zeichnung eines Oktaeders in einem Hexaeder:

- **zeichne** das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm
- Kanten schräg nach hinten nur 6 Kästchendiagonalen lang
- **markiere** die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot (jeweils beide Diagonalen ganz fein eintragen)
- **verbinde** (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder



Regelmäßige Polyeder

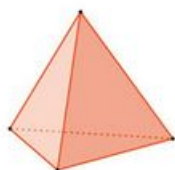
Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

Regelmäßige Polyeder

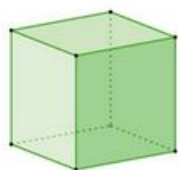
- haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
- haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
- haben keine einspringenden Ecken.

Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.

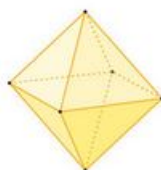
Tetraeder



Hexaeder



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. **Trage die Zahlen ein.**

tetra = 4

hexa = 6

okta = 8

dodeka = 12

ikosa = 20

Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder? Fülle die Text-Lücken aus.

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das **Tetraeder**.

Man kann auch je **vier** gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das **Oktaeder**.

Man kann auch je **fünf** gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das **Ikosaeder**.

Fügt man jedoch sechs gleichseitige Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene, und man erhält keinen **Körper** mehr.

Das gleiche gilt für **vier** Quadrate oder **drei** regelmäßige Sechsecke.

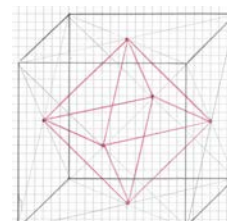
Man kann je drei **Quadrate** zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das **Dodekaeder**.

Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

Zeichnung eines **Oktaeders** in einem Hexaeder:

- **zeichne** das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm
- Kanten schräg nach hinten nur 6 Kästchendiagonalen lang
- **markiere** die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot (jeweils beide Diagonalen ganz fein eintragen)
- **verbinde** (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder



Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird der Lehrer stärker oder weniger stark lenken bzw. den Punkt 5. weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L stellt regelmäßige Polyeder zunächst als Körper vor, die aus „lauter gleichen regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt sind“ und teilt Steckerle in ausreichender Anzahl aus mit dem Auftrag: „Baue <u>alle</u> regelmäßigen Polyeder.“	Steckerle in Form regelmäßiger n-Ecke ($n = 3; 4; 5; 6$)
2. Erarbeitung I EA/PA 25 Min.	SuS - bauen die fünf regelmäßigen Polyeder, dazu auch den Doppel-Tetraeder - erfahren beim Tun die Grenzen der Möglichkeiten hierbei L fordert im Einzelgespräch SuS zur Verbalisierung dieser Grenzen auf L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Steckerle
3. Plenum I FEU 15 Min.	L - problematisiert die beiden Beispiele des Doppel-Tetraeders und des Dellen-Ikosaeders („Verdienen diese den Namen <i>regelmäßig</i> ?“) - präzisiert die Definition (Ecken, an denen gleich viele Flächen zusammentreffen + Konvexität) - verteilt das Arbeitsblatt - führt die fünf Namen der fünf Körper ein	Arbeitsblatt
4. Erarbeitung II EA/PA + FEU 10 Min.	SuS bearbeiten die Anweisungen des Arbeitsblattes L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend SuS und L besprechen die Eintragungen	- Körper aus Steckerle - Arbeitsblatt
5. Erarbeitung III EA/PA 15 Min.	Duale Beziehungen zwischen den regelmäßigen Polyedern: Zeichnung für den Fall Hexaeder → Oktaeder: - Zeichne das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm - Kanten schräg nach hinten <u>nur</u> 6 Kästchendiagonalen lang - markiere die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot (beide Diagonalen ganz fein eintragen) - verbinde (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder	kariertes Papier, Geodreieck, Stifte

Sachanalyse

Definition: Regelmäßige Polyeder sind konvexe Körper, bei denen an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen und deren Oberfläche aus kongruenten regelmäßigen Vielecken besteht.

Regelmäßige n-Ecke haben gleiche Seitenlängen und Innenwinkel α . Es gilt:

n =	3	4	5	6	> 6
$\alpha =$	60°	90°	108°	120°	>120°

Zwei Fragen: Welche gibt es? Wie kann man sicher sein, dass es keine weiteren gibt?

Durch Probieren findet man die **fünf regelmäßigen Polyeder**. Auf einen formalen Beweis der Existenz wird hier verzichtet. Die griechischen Vorsilben benennen die Anzahl der Flächen:

tetra = vier;

hexa = sechs;

okta = acht;

dodeka = zwölf;

ikosa = zwanzig

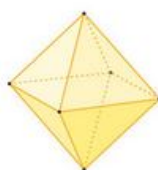
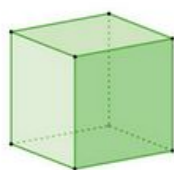
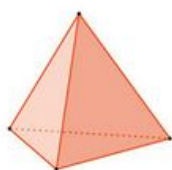
Tetraeder

Hexaeder

Oktaeder

Dodekaeder

Ikosaeder



Dass dies alle sind, wird im Folgenden anschaulich begründet. Dabei sei a die Anzahl der regelmäßigen n -Ecke, die eine räumliche Ecke bilden, offensichtlich ist $a \geq 3$.

$n = 3$: Man kann entweder je $a = 3$ gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen ($\rightarrow$ Tetraeder) oder je $a = 4$ ($\rightarrow$ Oktaeder) oder je $a = 5$ ($\rightarrow$ Ikosaeder) gleichseitige Dreiecke.

$a = 6$ gleichseitige Dreiecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 4$: Man kann nur je $a = 3$ Quadrate zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen ($\rightarrow$ Hexaeder = Würfel); $a = 4$ Quadrate aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 5$: Man kann nur je $a = 3$ regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen ($\rightarrow$ Dodekaeder), es ist $3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$.

$n = 6$: $a = 3$ regelmäßige Sechsecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

Alle anderen Kombinationen von a und n führen zu Überlappungen und scheiden damit ebenfalls als Möglichkeiten aus.

Eine dritte Frage:

Sind in der Definition die Forderungen „konvex“ und „an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen“ notwendig?

Antwort: ja. Ansonsten würde man weitere regelmäßige Körper bekommen:

- Man denke sich ausgehend vom Ikosaeder eine der Ecken einspringend nach innen, dieser „Dellen-Ikosaeder“ besteht nach wie vor aus zwanzig gleichseitigen Dreiecken und an jeder Ecke treffen gleich viele Dreiecke aufeinander.

- Man denke sich zwei Tetraeder an je einer der Flächen aufeinander geklebt, der „Doppeltetraeder“ besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, ist konvex, aber an den Ecken treffen entweder drei oder vier Dreiecke zusammen.

Eine letzte Frage:

Wie gelingt die Bestätigung des Polyedersatzes mithilfe der regelmäßigen Polyeder ohne Abzählen?

Der Eulersche Polyedersatz besagt bei konvexen Polyedern: $e + f - k = 2$, hierbei ist

e ... Anzahl der Ecken, f .. Anzahl der Flächen und k ... Anzahl der Kanten.

Es gilt $e = \frac{n \cdot f}{a}$ und $k = \frac{n \cdot f}{2}$ (Nachprüfen durch Verbalisieren).

Setze z.B. beim Würfel $f = 6$ und errechne (!) daraus $e = 8$ und $k = 12$, in der Tat ist $8 + 6 - 12 = 2$.

Lehrerblatt

Didaktischer Kommentar:

Der Charme dieses Vorhabens liegt darin, dass beim Tun

- die fünf regelmäßigen Polyeder gefunden werden können und
- die Grenzen der Möglichkeiten erfahrbar werden.

Für Unterstufenschüler gibt man sich mit dem Nachweis der Existenz durch die Konstruktion zufrieden. Beim Arbeitsblatt wird nur der Hauptstrang des Gedankengangs dokumentiert.

Die Suche nach den regelmäßigen Polyedern ist in natürlicher Weise **selbstdifferenzierend**:

- beim Ausloten und Verbalisieren der Grenzen der Möglichkeiten
- beim Finden des Doppel-Tetraeders (den Dellen-Ikosaeder darf der Lehrer mit in die Diskussion einbringen)

Das Abzählen durch Rechnen ist den Schülern von rechtsecksförmigen Mustern her bekannt (z.B. Anzahl der Stuhlreihen in einem Saal, Anzahl der Sitze in jeder Reihe). Die Berechnung der Anzahl der Körper-Ecken mithilfe der Anzahl der Flächen und der Anzahl der Flächen-Ecken zu berechnen, bildet eine kleine intellektuelle Herausforderung und kann ggf. auch vertieft werden:

- Auf der Wiese hinterm Bauernhof sind 100 Beine unterwegs. Es gibt 29 Tiere, nämlich Schafe und Hühner und ein Schäferhund. Wie viele Schafe sind es? Usw.

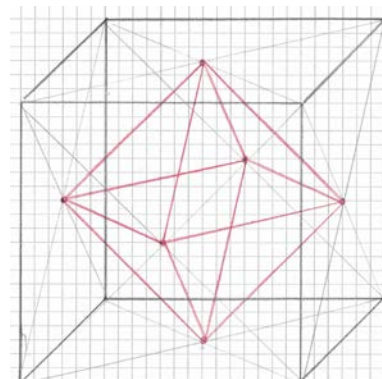
Nachfolgende Tabelle offenbart duale Bezüge zwischen den regulären Körpern.

Anzahl der...	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
... Flächen	4	6	8	12	20
... Ecken	4	8	6	20	12

Diese haben eine geometrische Entsprechung. Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Seitenflächen, so erhält man wieder einen regelmäßigen Körper:

Tetraeder → Tetraeder; Hexaeder → Oktaeder;
 Oktaeder → Hexaeder; Ikosaeder → Dodekaeder;
 Dodekaeder → Ikosaeder

Die Schrägbild-Zeichnung des Oktaeders im Würfel lässt sich gut bewerkstelligen. Alle anderen Übergänge kann man bei der Betrachtung der regelmäßigen Körper immerhin gedanklich nachvollziehen.



Ziele:

- die Problemlösestrategien
 - „ein Problem in Teilprobleme aufspalten“,
 - „alle Fälle der Reihe nach abhandeln“
 - „systematisches Probieren“ und
 - „Abzählen durch Rechnen“
- kennen lernen bzw. erproben - das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln
- Freude an der Ästhetik von Figuren und an der Aufdeckung von Zusammenhängen empfinden

Material:

- Steckerle von regelmäßigen n-Ecken ($n = 3; 4; 5; 6$) in ausreichender Anzahl



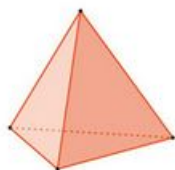
Regelmäßige Polyeder

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

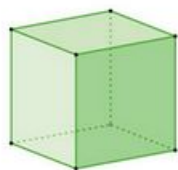
Regelmäßige Polyeder

- haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
- haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
- haben keine einspringenden Ecken oder Löcher.

Tetraeder



Hexaeder



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. **Trage die Zahlen ein.**

tetra = ... ;	hexa = ... ;	okta = ... ;	dodeka = ... ;	ikosa = ...

Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder? **Fülle die Text-Lücken aus.**

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das

Fügt man jedoch gleichseitiger Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene, und man erhält keine mehr.

Das gleiche gilt für Quadrate oder regelmäßige Sechsecke.

Man kann je drei zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

Wie viele Ecken e und Kanten k haben die regelmäßigen Polyeder jeweils?

Das kann man natürlich einfach abzählen. Beim Ikosaeder kann man sich dabei leicht verzählen.

Man kann e und k aber auch ausrechnen!

Hier wird das an einem Beispiel des Hexaeders (Würfels) vorgemacht:

- Das Hexaeder hat $f = 6$ Quadrate. Jedes Quadrat hat 4 Ecken.
Insgesamt sind es also $6 \cdot 4 = 24$ Quadrat-Ecken. Immer 3 Quadrat-Ecken ergeben zusammen eine Hexaeder-Ecke. Es gibt also $e = 24 : 3 = 8$ Hexaeder-Ecken.
- Das Hexaeder hat $f = 6$ Quadrate. Jedes Quadrat hat 4 Seiten.
Insgesamt sind es also $6 \cdot 4 = 24$ Quadrat-Seiten. Immer 2 Quadrat-Seiten ergeben zusammen eine Hexaeder-Kante. Es gibt also $k = 24 : 2 = 12$ Hexaeder-Kanten.

Fülle die Tabelle aus (Anzahlen ausrechnen!), **mache die Probe** mit dem eulerschen Polyedersatz.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$f =$	4	6	8	12	20
$e =$		8			
$k =$		12			
$k = e + f - 2?$		stimmt			

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

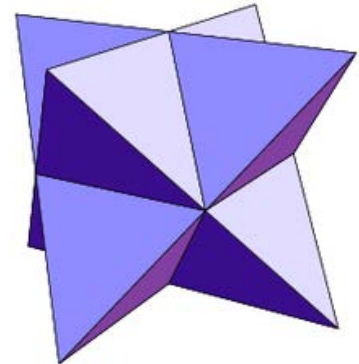
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird der Lehrer stärker oder weniger stark lenken bzw. den Punkt 6. weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L stellt regelmäßige Polyeder zunächst als Körper vor, die aus „lauter gleichen regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt sind“ und teilt Steckerle in ausreichender Anzahl aus mit dem Auftrag: „Baue <u>alle</u> regelmäßigen Polyeder.“	Steckerle in Form regelmäßiger n-Ecke ($n = 3; 4; 5; 6$)
2. Erarbeitung I EA/PA 25 Min.	SuS bauen die fünf regelmäßigen Polyeder, dazu auch den Doppel-Tetraeder SuS erfahren beim Tun die Grenzen der Möglichkeiten hierbei L fordert im Einzelgespräch SuS zur Verbalisierung dieser Grenzen auf L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Steckerle
3. Plenum I FEU 15 Min.	L - problematisiert die beiden Beispiele des Doppel-Tetraeders und des Dellen-Ikosaeders („Verdienen diese den Namen <i>regelmäßig</i> ?“) - präzisiert die Definition (Ecken, an denen gleich viele Flächen zusammentreffen + Konvexität) - verteilt das Arbeitsblatt - führt die fünf Namen der fünf Körper ein	Arbeitsblatt
4. Erarbeitung II EA/PA 10 Min.	SuS bearbeiten die Anweisungen des Arbeitsblattes L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	- Körper aus Steckerle - Arbeitsblatt
5. Plenum II FEU 10 Min.	SuS und L besprechen die Eintragungen SuS sagen die Texte entsprechend des ausgeführten Hexaeder-Beispiels L thematisiert weitere Beispiele für die Strategie „Abzählen durch Rechnen“ – vgl. didakt. Kommentar	- Körper aus Steckerle - Arbeitsblatt
6. Erarbeitung III FEU und EA/PA 25 Min.	L thematisiert die dualen Bezüge zwischen den regulären Körpern anhand der Tabelle Gedanklich am Beispiel Dodekaeder → Ikosaeder: „3 Flächen bilden eine Ecke, deren Mittelpunkte also ein Dreieck, es gibt 20 Ecken, also 20 Dreiecke ...“ Zeichnung im Fall Hexaeder → Oktaeder: - Zeichne das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm - Kanten schräg nach hinten <u>nur</u> 6 Kästchendiagonalen - markiere die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot (beide Diagonalen ganz fein eintragen) - verbinde (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder	kariertes Papier, Geodreieck, Stifte

Sachanalyse

Der Keplerstern

Der nach Johannes Kepler benannte „Keplerstern“ wird auch als Sterntetraeder bezeichnet. Er ist ein achtstrahliger Stern und gehört zu den nicht-konvexen Deltaedern (Deltaeder haben als Seitenflächen nur gleichseitige Dreiecke, bei nichtkonvexen liegen die Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten des Polyeders nicht unbedingt auch im Polyeder). Der Keplerstern entsteht durch Verschmelzung zweier punktsymmetrischer Tetraeder.



Die äußeren Eckpunkte des Körpers beschreiben einen Würfel. Dies kann gut veranschaulicht werden, indem Schnüre von einer Ecke zur nächsten angeklebt werden.

Die Schnittmenge der beiden Tetraeder stellt ein Oktaeder dar, dessen Kanten wiederum die Innenkanten des Sterntetraeders darstellen.

Erstmals dargestellt wurde das Sterntetraeder durch Leonardo da Vinci in Luca Pacioli's *De Divina Proportione* 1509. Auch der Grafiker M. C. Escher hat das Sterntetraeder als Motiv für das Bild *Doppelplanetoid* verwendet: Das eine Tetraeder hat die Form einer von Menschen bewohnten Burg, während das andere eine mit dem ersten durchdrungene, von Dinosauriern bewohnte Welt darstellt.

Ecken, Kanten und Seitenflächen:

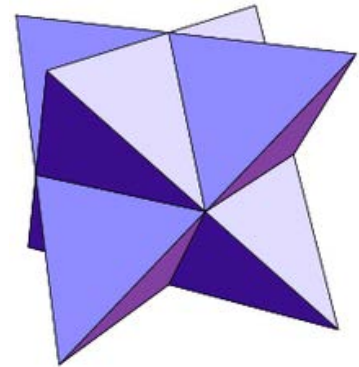
Das Sterntetraeder hat $e = 5 + 4 + 5 = 14$ Ecken, $k = 8 \cdot 3 + 12 = 36$ Kanten und $f = 3 \cdot 8 = 24$ Seitenflächen.

Es erfüllt also auch die Eulersche Polyederformel ($k = e + f - 2$), obwohl es kein konvexes Polyeder ist. Schüler und Schülerinnen verwundert dies oft. Sie folgern oft aus der Gültigkeit der Eulerschen Polyederformel, dass für nichtkonvexe Polyeder $k \neq e + f - 2$ ist ($\rightarrow$ Nichtumkehrbarkeit, vgl. didaktischen Kommentar zur Eulerschen Polyederformel). Betrachtet man die beiden Tetraeder, die sich durchdringen, sind die Daten $e = 8$, $k = 12$ und $f = 8$.

Lehrerblatt

Didaktischer Kommentar:

Schön aufgebaute regelmäßige Figuren üben auf die meisten Menschen eine Faszination aus und stellen so eine Motivation für Mathematik dar. Im Zentrum der Stunde steht der nach Johannes Kepler benannte „Keplerstern“. Dieser wird zunächst gebastelt. Dabei wird die Feinmotorik der Schülerinnen und Schüler geschult und zugleich üben sie, Informationen (aus der Anleitung) zu verstehen und umzusetzen.



Die Untersuchung des gebastelten Sterns schult den Umgang mit Fachbegriffen (Polyeder, Ecke, Kante...) sowie das räumliche Vorstellungsvermögen. Letzteres ist in der Regel unterschiedlich stark ausgeprägt. Bei Schwierigkeiten können die SuS folgendermaßen unterstützt werden:

- Indem Schnüre von einer Ecke zur nächsten angeklebt werden, kann veranschaulicht werden, dass die Tetraederecken einen Würfel bilden.
- Dass die 8 Tetraeder ein Oktaeder einschließen, wird deutlich, wenn man mit den „Steckerle“ 8 Tetraeder (incl. Bodenfläche) baut und zum Keplerstern zusammensetzt. Baut man nun die äußeren Dreiecksflächen ab, so bleibt ein Oktaeder übrig.

Folgende Erweiterungsmöglichkeit ist denkbar:

Falls die Schülerinnen und Schüler bereits wissen, wie der Flächeninhalt von Dreiecken berechnet wird, kann noch die Oberfläche des Sterntetraeders berechnet werden: Sie setzt sich aus $3 \cdot 8 = 24$ gleichseitigen Dreiecken zusammen. Die Formel für den Inhalt gleichseitiger Dreiecke kennen die Schülerinnen und Schüler noch nicht. Sie müssen die Höhe der Dreiecke ausmessen. Es gilt dann:

$$O_{\text{Keplerstern}} = 24 \cdot \text{Grundseite}_{\text{Dreieck}} \cdot \text{Höhe}_{\text{Dreieck}}$$

Ziele:

- Anleitungen verstehen und umsetzen
- Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Anwendung von Fachbegriffen
- Begeisterung für die Schönheit der Mathematik wecken

Material:

- Schüler-Arbeitsblatt
- Ausschneidebögen aus Tonpapier – möglichst in zwei verschiedenen Farben
- Schere und Klebstoff (von den Schülerinnen und Schülern mitgebracht)
- bereits gebastelter Keplerstern
- evtl. verschiedene Polyeder und evtl. Steckerle, um Tetraeder... zu bauen
- evtl. Schnur (um den Würfel zu veranschaulichen)

Der Keplerstern - ein dreidimensionaler Stern

Der Keplerstern ist ein dreidimensionaler Stern, der nach dem Mathematiker und Astronom Johannes Kepler aus Weil der Stadt benannt wurde.

Bastle den Stern nach der folgenden Anleitung. Bearbeite dann die Aufgaben:

1. Schneide die Figuren auf den beiden Bögen an den äußeren Linien aus. (Du solltest jetzt jede Figur jeweils 4 Mal haben.)
(Tipp: Wenn Deine beiden Bögen unterschiedliche Farben haben, wird dein Stern nachher besonders schön.)
2. Knicke die inneren Linien vor (alle in die gleiche Richtung).
3. Forme nun aus jedem Teil eine dreieckige Pyramide, die nach einer Seite offen ist und verbinde sie mithilfe der dunkler markierten Klebelasche. Du erhältst dadurch 8 Pyramiden: 4 mit 3 Klebelaschen und 4 ohne Klebelasche.
4. Verbinde nun die Teile: Klebe dazu an eine Pyramide mit drei Laschen drei Pyramiden ohne Lasche (an jede Klebefläche eine). Klebe die Laschen immer auf die Innenseite der Pyramiden, damit man sie am Ende nicht mehr sieht.

Aufgaben:

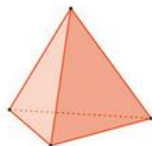
Sterne sind sehr regelmäßig aufgebaut und können daher auch gut mathematisch untersucht werden:

1. Aus welchen räumlichen Grundkörpern besteht der Kepler-Stern?
2. Man kann sich auch vorstellen, dass der Kepler-Stern aus zwei Körpern besteht, die ineinandergesteckt werden. Mathematiker nennen solche Körper "Durchdringungskörper".
Aus welchen großen Körpern besteht der Kepler-Stern?
3. Ist dir schon aufgefallen, dass der Raum, um den sich die acht kleinen Tetraeder anordnen, genau dem Raum entspricht, wo die beiden großen Körper einander durchdringen? Beschreibe diesen Raum des Kepler-Sterns.

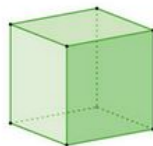
Aus der letzten Stunde kennst du schon die platonischen Körper:

Gib an, ob einer der abgebildeten fünf platonischen Körper diesen Raum ausfüllt.

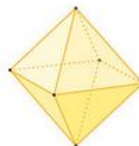
Tetraeder



Hexaeder



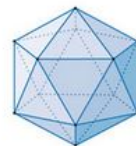
Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

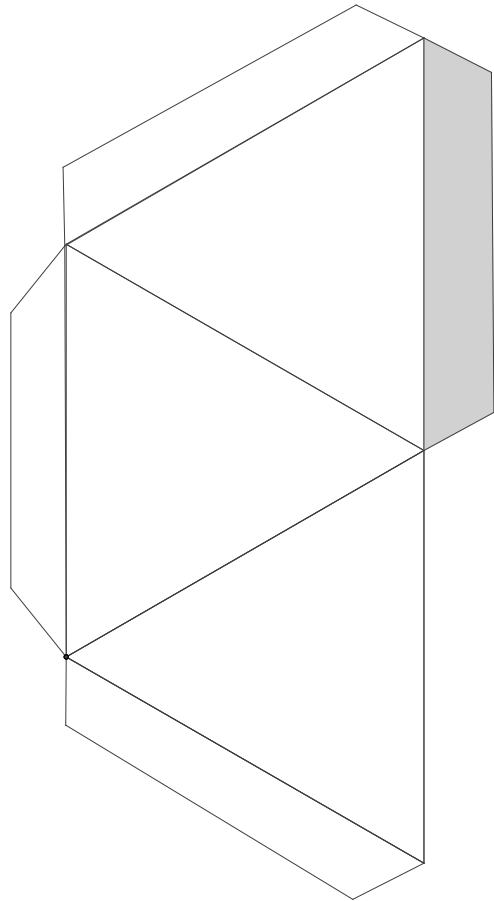
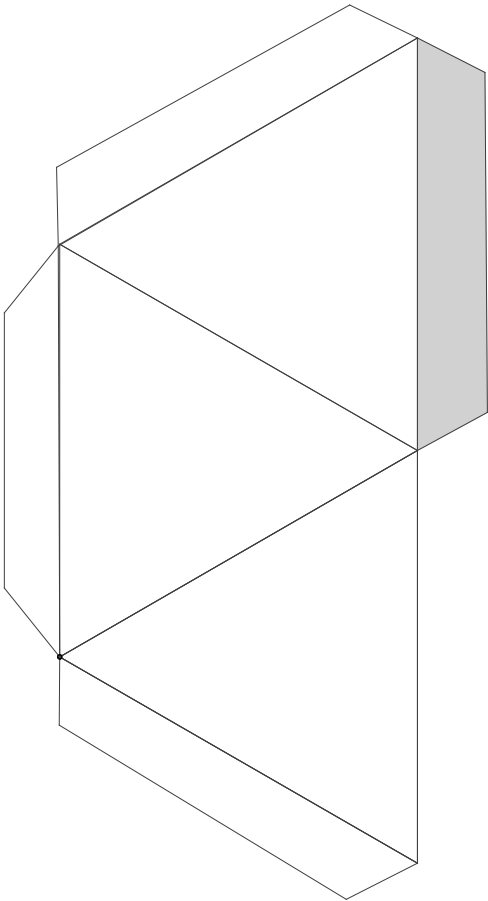
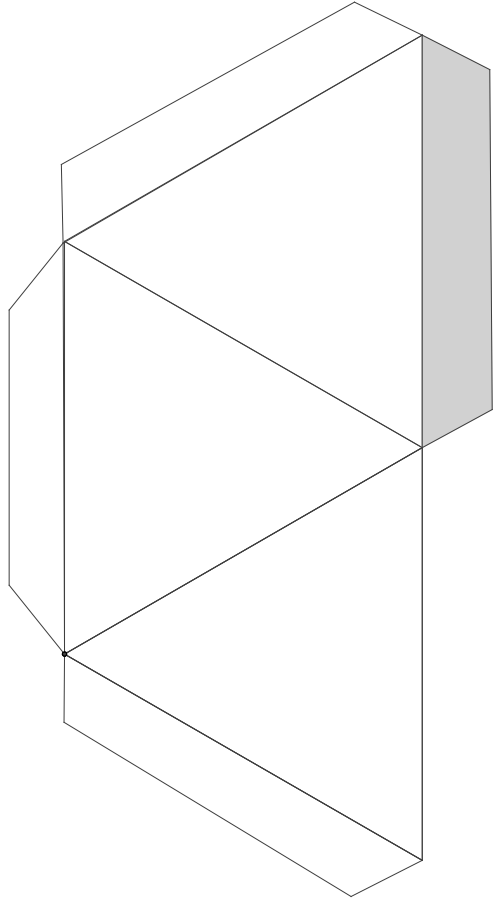
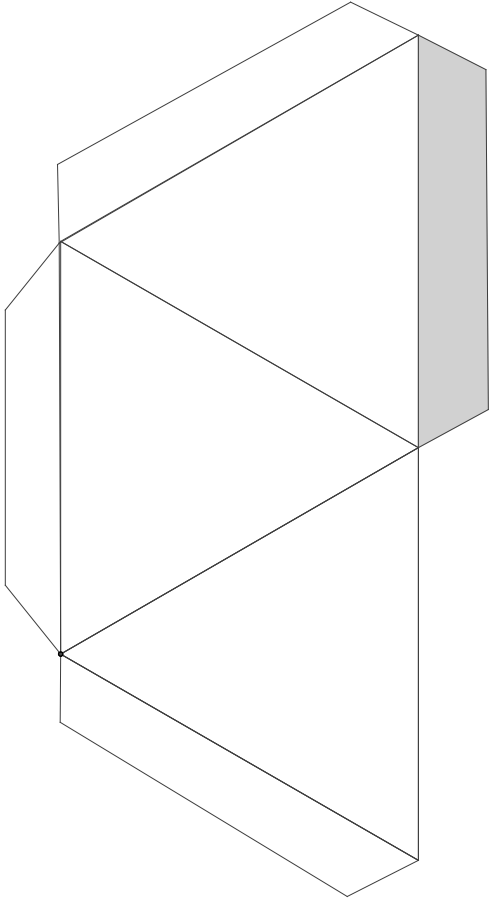


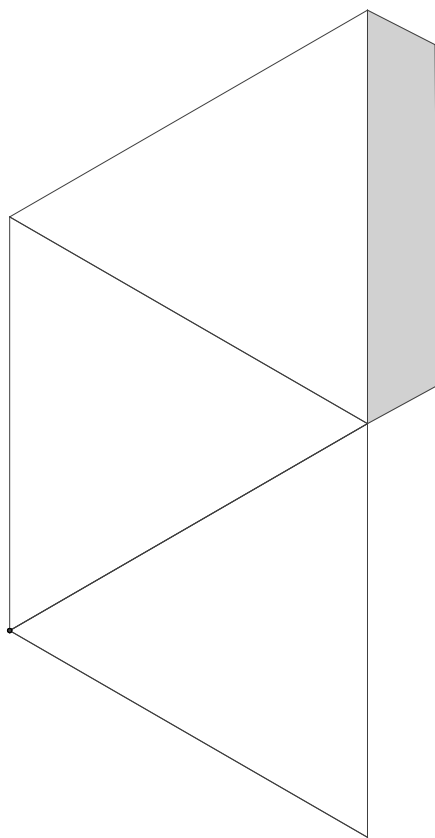
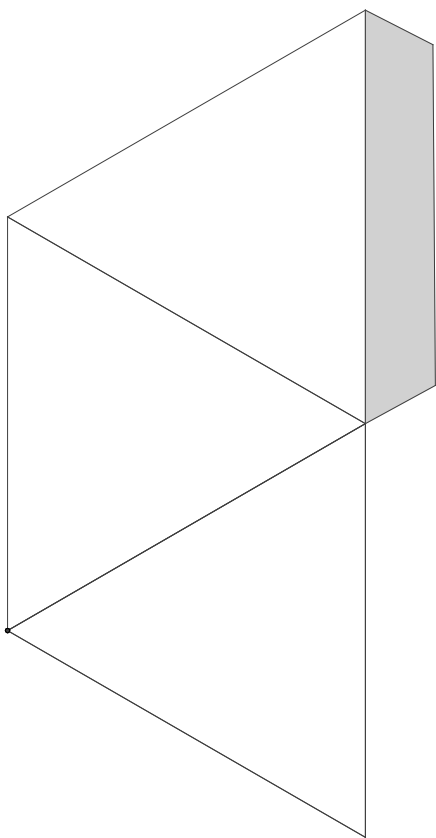
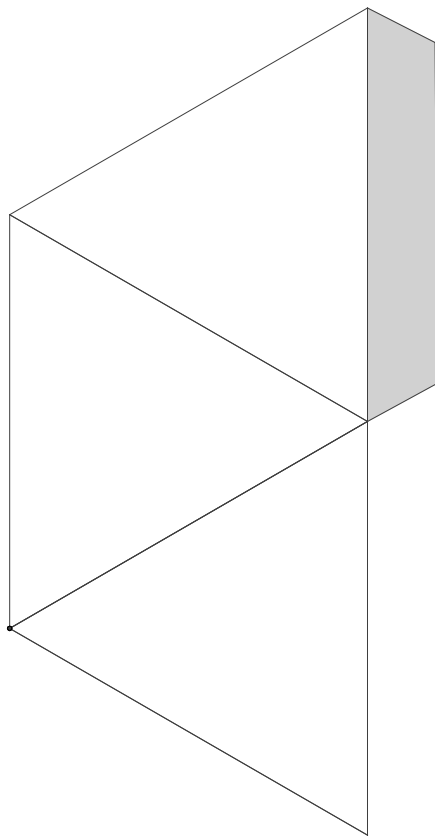
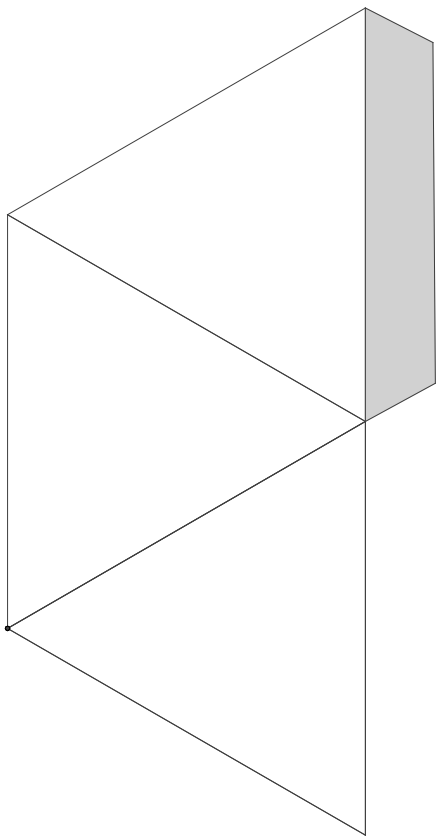
4. Verbinde die äußeren Eckpunkte des Kepler-Sterns in Gedanken. Welcher Körper entsteht dadurch?

Für Schnelle:

5. Aus der letzten Stunde kennst du die Polyederformel von Euler. Prüfe, ob sie auch für den Keplerstern gilt.
6. Zum Vergleich: Wie viele Ecken, Kanten und Seitenflächen haben die beiden Körper, die den Keplerstern ergeben, wenn man sie ineinandersteckt?

1





Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg Themenstellung 5 Min.	L zeigt fertigen Keplerstern: Dieser Stern ist nach einem bekannten Mathematiker und Naturwissenschaftler benannt: Johannes Kepler aus Weil der Stadt (1571 – 1630). (evtl. Anknüpfung an Johannes Kepler: wer war schon im Keplermuseum in Weil der Stadt?) Ihr dürft heute alle so einen Stern basteln	Fertig gebastelter Keplerstern
2. Basteln des Keplersterns + Erarbeitung EA/PA 40 Min.	SuS - schneiden die Figuren aus den Bögen aus - basteln den Keplerstern - beantworten die Fragen in Partnerarbeit L hilft bei der Fertigstellung des Keplersterns L gibt den Tipp: Schaut die Polyeder auf dem Schülerblatt an.	Schülerblatt Keplerstern + Bastelbögen Schere, Klebstoff, Körpermodelle
3. Sicherung und Reflexion FEU 15 Min.	L und SuS tauschen sich über die Ergebnisse aus L visualisiert den Würfel mit Schnüren Tafelanschrieb: <i>Der Keplerstern hat 36 Kanten, 14 Ecken und 24 Flächen.</i> $36 = 14 + 24 - 2$ <i>Er erfüllt also die Eulersche Polyederformel, obwohl er kein konvexer Polyeder ist.</i>	Schnur Tafel / Heft ?

Lehrerblatt

Die Einheit ist auf ca. 3 Zeitstunden ausgerichtet, kann aber auch kürzer unterrichtet werden.

Je nach Ausstattung kann man mit den Programmiersprachen Scratch oder Pocket Code arbeiten.

Scratch läuft im Browser und kann z.B. im Computerraum oder mit Laptops oder Tablets verwendet werden. Der Link ist

https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tip_bar=home.

Pocket Code gibt es zurzeit nur für Android Smartphones. Es soll aber auch für Apple entwickelt werden. Voraussetzung wäre hier also, dass zumindest zwei Schüler gemeinsam ein Android Smartphone oder Tablet zur Verfügung haben. Man findet das Programm im Google Playstore.

Bevor Sie mit den Schülern die Arbeitsblätter bearbeiten sollten Sie die Lösungen selbst programmiert haben.

Scratch ist ziemlich intuitiv bedienbar. Wir verzichten hier auf eine Einführung, weil diese ausführlich auf den Schüler-Arbeitsblättern zu finden ist. Bei Pocket Code sollte man unbedingt eine kleine Einführung zur Bedienung geben. Man kann sich ziemlich schnell in den vielen Bildschirmen verirren und die Menüpunkte sind nicht immer einleuchtend. Dafür hat die Verwendung des Smartphones einen großen Anreiz.

Hier einige Hinweise zur Bedienung.

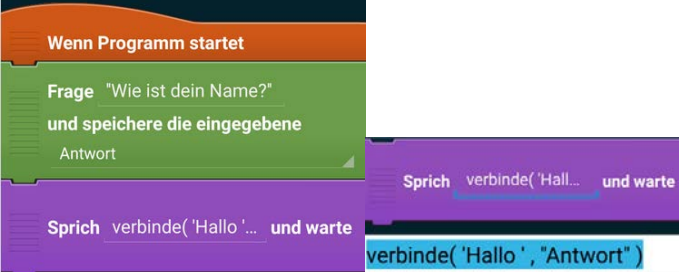
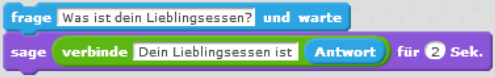
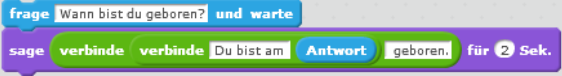
Scratch: Klicken Sie sich durch alle Bereiche. Die Bezeichnung der Bereiche ist nicht besonders strukturiert. Man findet z.B. "Sage" bei "Aussehen" und "Frage" bei "Fühlen". Insbesondere sollte man sich mit "Daten" vertraut machen. Mit der Erzeugung einer Variablen entstehen auch neue Programmierblöcke wie "Setze ... auf" und "Ändere ... um". Bei einem Programmblock besteht ein Unterschied, ob man ihn oben oder unten anfasst. Unten kann man Elemente wegziehen, oben verschiebt man den ganzen Block.

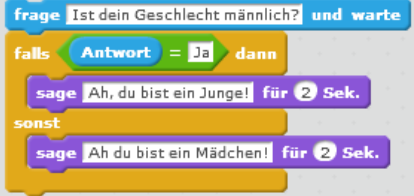
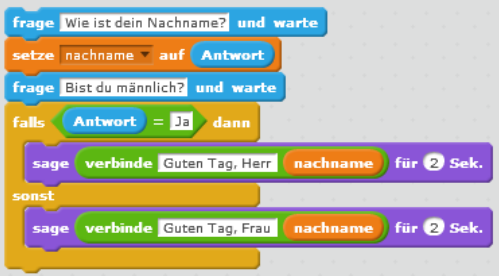
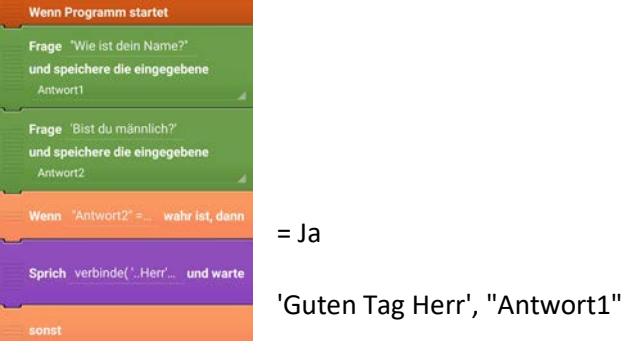
Pocket Code: Hier ist es schon nicht ganz einfach überhaupt zum Programm zu kommen. Man klickt zuerst auf "NEU", vergibt einen Namen für das Programm, wählt die Ausrichtung, dann klickt man auf "Hintergrund" und wählt "Skripte" und dann auf +, nun erst bekommt man die Bereiche aus denen Anweisungen gewählt werden können. Hat man dann ein Programm zusammengestellt und lässt es laufen (Pfeil am unteren Rand), dann bekommt man am Ende unter Umständen einen leeren Bildschirm und ist etwas hilflos. Hier hilft dann nur die Zurücktaste des Smartphones und dann erscheint am unteren Rand eine Bedienleiste bei der man auf Zurück klicken kann.

Zum Löschen einer Anweisung klickt man auf die Anweisung und wählt dann Baustein löschen (hier findet man auch Baustein verschieben).

In der Hilfe findet man eine YouTube-Einführung in die vielfältigen Möglichkeiten, die wir nur minimal nutzen.

Lösungen der Aufgaben:

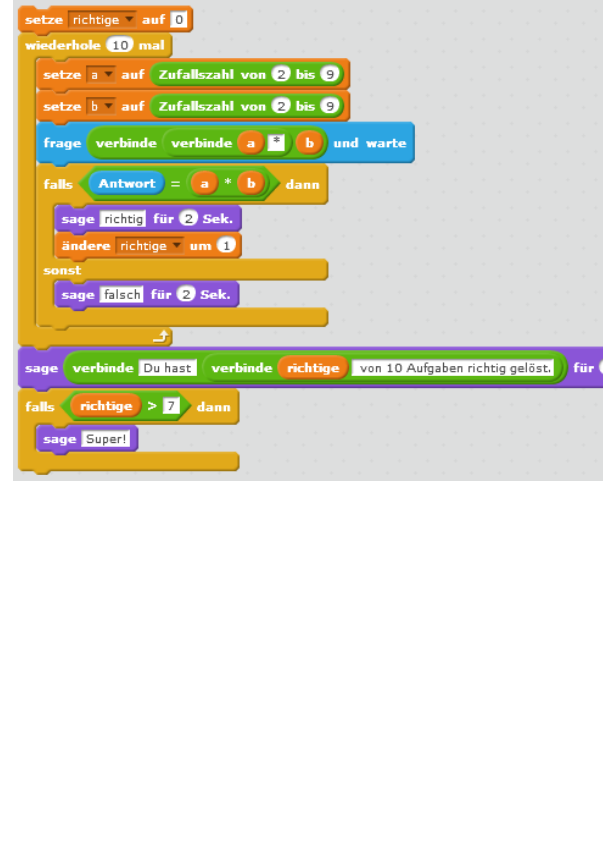
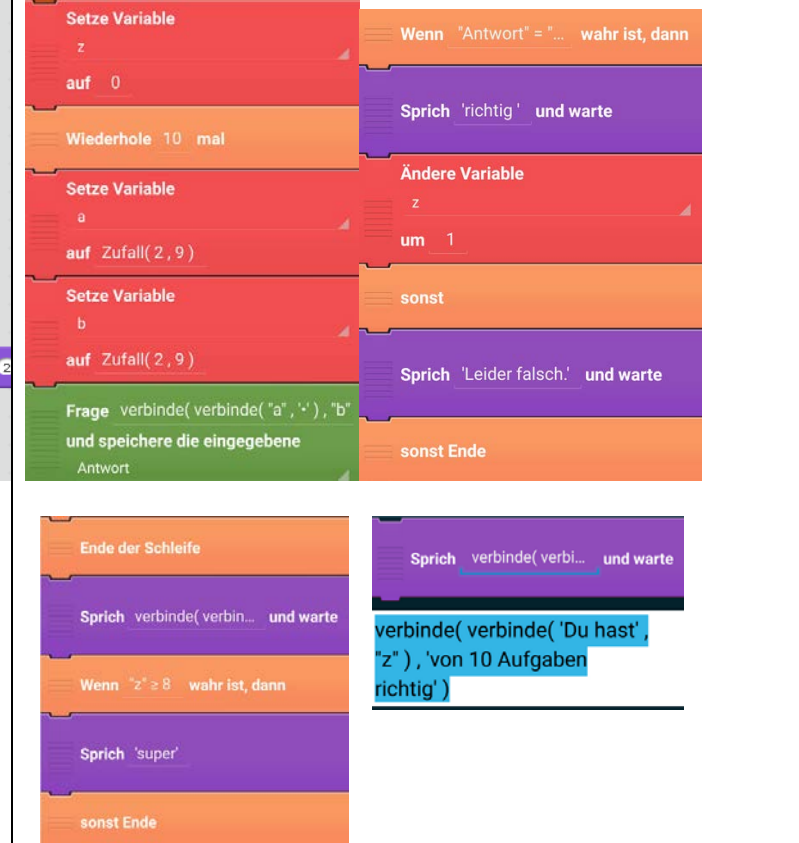
Scratch	Pocket Code
AB1 Aufg.1	
	
Die Antwort kommt jetzt nicht in zwei Schritten.	
AB1 Aufg. 2	
	<pre>verbinde('Dein Lieblingsessen ist ' , "Antwort")</pre>
Auf das Leerzeichen nach ist achten.	
AB1 Aufg. 3	
	<pre>verbinde(verbinde('Du bist am' , "Antwort") , 'geboren')</pre>
Auf Leerzeichen nach am und vor geboren achten.	
AB1 Aufg. 4	
Noch gibt es kein Beispiel, wo dies notwendig wäre. Hier können Schüler schon erkennen, dass Antwort immer nur das Ergebnis der letzten Eingabe enthält. Es kann also das Bedürfnis entstehen, einen Wert zu speichern (s. AB2 Aufg. 3). Man kann aber trotzdem die Aufgabe einfach lösen:	
	<pre>Verbinde(verbinde(verbinde('Du','bist am'),'Antwort'),'geboren')</pre>

AB2 Aufg. 1	
In der linken Version wird immer Schade ausgegeben, in der rechten Version nur wenn man nicht Ja sagt.	
AB2 Aufg. 2	
	
AB2 Aufg. 3	
	

AB2 Aufg. 4 <pre> frage Was ist 5 * 7? und warte falls Antwort = 35 dann sage Super! für 2 Sek. sonst sage Leider falsch! für 2 Sek. </pre>	<pre> Frage 'Was ist 3*4?' und speichere die eingegebene Antwort Wenn 'Antwort' = '...' wahr ist, dann Sprich 'Super' und warte sonst Sprich 'Leider falsch!' und warte </pre>
Diese Aufgabe dient als Vorbereitung auf AB3 und kann natürlich schon in diesem Sinne variiert werden	
AB3 Aufg. 1 <pre> frage Was ist 4 * 7? und warte falls Antwort = 4 * 7 dann sage richtig für 2 Sek. sonst sage falsch für 2 Sek. </pre>	<pre> Wenn "Antwort" = ... wahr ist, dann "Antwort" = 4 * 7 </pre>
AB3 Aufg. 2 <pre> frage verbinde verbinde Zufallszahl von 2 bis 9 verbinde Zufallszahl von 2 bis 9 und warte </pre>	<pre> Wenn verbinde(v... wahr ist, dann verbinde(verbinde(Zufall(2 , 9) , '.') , Zufall(2 , 9)) </pre>

AB3 Aufg. 3 	 "Antwort" = a x b
AB3 Aufg. 4 Es zählt im Sekundentakt von 0 bis 4 hoch. Man könnte einen Countdown anregen.	3-Sekundentakt

AB3 Aufg. 5

 setze richtige auf 0 wiederhole 10 mal setze a auf Zufallszahl von 2 bis 9 setze b auf Zufallszahl von 2 bis 9 frage verbinde verbinde a b und warte falls Antwort = a * b dann sage richtig für 2 Sek. ändere richtige um 1 sonst sage falsch für 2 Sek. sage verbinde Du hast verbinde richtige von 10 Aufgaben richtig gelöst. für 2 falls richtige > 7 dann sage Super!	 Setze Variable z auf 0 Wiederhole 10 mal Setze Variable a auf Zufall(2, 9) Setze Variable b auf Zufall(2, 9) Frage verbinde(verbinde("a", "."), "b" und speichere die eingegebene Antwort Wenn "Antwort" = "..." wahr ist, dann Sprich 'richtig' und warte Ändere Variable z um 1 sonst Sprich 'Leider falsch.' und warte sonst Ende Ende der Schleife Sprich verbinde(verbinde("Du hast", "z"), "von 10 Aufgaben richtig") Wenn "z" > 8 wahr ist, dann Sprich 'super' sonst Ende Sprich 'Leider falsch' sonst Ende Warte 2 Sekunden Ende der Schleife

Ein Fehler in Pocket Code: Das "Warte" funktioniert in der Sprich-Anweisung nicht so richtig.

Deshalb ist es günstiger, die Anweisung in zwei Teile aufzuspalten:



Sprich 'Leider falsch'
 sonst Ende
 Warte 2 Sekunden
 Ende der Schleife

Didaktischer Kommentar

Ziele: Die Stunden haben offensichtliche und verdeckte Ziele.

Einerseits sollen die SuS Freude am Programmieren entwickeln und im besten Fall anschließend eigene Programme entwickeln. Dabei lernen Sie die wesentlichen Elemente eines Programms (Eingabe, Ausgabe, Variable, Verzweigung und Schleife) zu verwenden.

Andererseits müssen sie beim Testen ihres Programms im Kopf prüfen, ob dieses richtig rechnet. Dabei üben sie das kleine Einmaleins. Ein wesentliches, übergeordnetes Ziel von Mkid ist eine Stärkung der Grundfertigkeiten, zu denen auch das kleine (oder große) Einmaleins gehört.

Sachanalyse:

Eine **Eingabe** benötigt in der Regel eine Aufforderung, die Möglichkeit z.B. über die Tastatur etwas einzugeben und mit einem weiteren Element (z.B. ein Button) zu signalisieren, dass die Eingabe beendet worden ist. D.h. das Programm wartet während der Eingabe. Wenn die Eingabe sinnvoll verwendet werden soll, dann muss das Eingegebene in einer Variablen gespeichert werden. Bei Scratch gibt es eine vorgegebene Variable Antwort, bei Pocket Code muss eine Variable dafür benennen.

Variablen sind beim Programmieren Speicher, in denen etwas aufgehoben und wieder abgerufen werden kann. Sie unterscheiden sich also inhaltlich von der Variable in der Mathematik.

Eine **Ausgabe** kann auf den Bildschirm (Scratch) oder auch akustisch (Pocket Code) erfolgen. Gibt es zwei Ausgaben hintereinander, dann muss sichergestellt sein, dass die zweite Ausgabe die erste nicht überschreibt, dazu dient z.B. das Warten für eine bestimmte Zeit.

Die **Verzweigung** besteht aus einer Bedingung und ein bis zwei Blöcken. Der erste Block wird ausgeführt, wenn die Bedingung wahr ist, der zweite, wenn sie falsch ist. Danach geht das Programm weiter, ohne, dass die Bedingung eine Rolle spielt.

Die **Schleife** um einen Anweisungsblock sorgt dafür, dass der Block wiederholt wird. Dabei kann er dauernd, mit Abbruchbedingung oder n-mal durchgeführt werden.

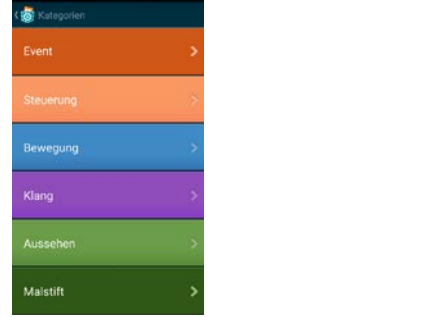
Didaktische Reduktion

Für SuS ist der Variablenbegriff besonders schwierig. Man sollte sie als einen Zettel, auf den man etwas schreibt, einführen. Man kann z.B. Zettel beschreiben und einem Schüler geben. Nun möchte man wissen, was auf einem Zettel steht. Dazu muss man dem Schüler sagen, welcher Zettel gefragt ist. Man kann auch sagen: Nimm den blauen Zettel, lies die Zahl darauf und erhöhe sie um 1. Schreibe nun die neue Zahl statt der alten auf den Zettel.

Programmieren mit Pocket Code (1)

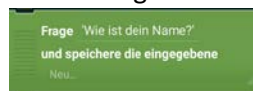
Installiere auf deinem Android Smartphone oder Tablet die App Pocket Code.

Du kannst mit dieser Seite eigene Programme schreiben. Der Bildschirm sieht zum Beginn so aus.

	Klicke auf "Neu" und gib dem Programm einen Namen, z.B. Test. Wähle dann die Ausrichtung für die Anzeige. Klicke dann auf Hintergrund und schließlich auf Skripte. Nun musst du auf das Plus klicken. Der Bildschirm sieht dann wie rechts aus.	

Hier kannst du Bereiche auswählen, aus denen du Anweisungen wählen kannst.

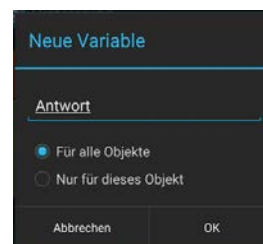
Wähle nun den Bereich "Aussehen" aus und



und dort .

Schreibe als Frage "Wie heißt du?" und statt neu Antwort.

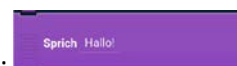
Dein Programm sieht nun so aus:



Klicke dann auf 

Merke dir: Ein Programm führt man aus, indem man auf  klickt. Zurück kommst du über den Zurück-Knopf auf deinem Handy.

Addiere nun mit + eine weitere Anweisung aus dem Bereich Klang:



und ziehe sie unter die Frage.

Merke dir: Elemente kann man wie Puzzle-Teile aneinander setzen. Die Puzzleteile werden nacheinander ausgeführt. Man nennt das ein Programm.

Wozu gibt man eigentlich seinen Namen ein? Er wurde in der Variablen Antwort gespeichert. Du kannst die Variable in das "Sagen" einbauen. Dazu musst du auf Hallo klicken und dann im Eingabefeld Daten Antwort auswählen.



Merke dir: Variablen kann man über die Eingabe "Daten" einfügen

Aufgabe 1

Klicke auf "Antwort". Im Bereich Funktionen findest du `verbinde('Hallo','Welt')`. Setze dieses für "Antwort" in deinem Programm ein. Setze nun "Antwort" in das "Welt"-Feld. Wie hat sich dein Programm verändert?

Aufgabe 2

Nun sollst du ein Programm schreiben, das nach deinem Lieblingsessen fragt und dann sagt: "Dein Lieblingsessen ist ...", wobei ... durch die Antwort ersetzt werden soll.

Aufgabe 3

Jetzt wird es schwierig: Das Programm soll dich nach deinem Geburtstag fragen und dann ausgeben "Du bist am ... geboren." Leider gibt es hinter "Welt" kein weiteres Feld. Tipp: Man kann "verbinde" ineinander schachteln.

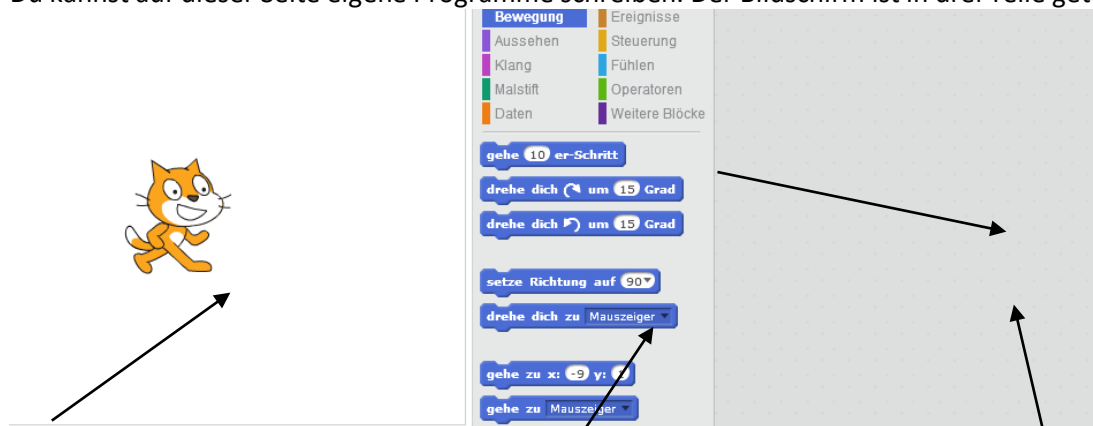
Aufgabe 4

Denke dir ein Programm mit drei ineinander geschachtelten "verbinde" aus.

Programmieren mit Scratch (1)

Öffne im Browser den Link https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tip_bar=home

Du kannst auf dieser Seite eigene Programme schreiben. Der Bildschirm ist in drei Teile geteilt.



Hier siehst du die Ausführung der Anweisungen, hier ist ein Vorrat von Anweisungen, die du hierher ziehen kannst.

Wähle nun in der Mitte den Bereich "Fühlen" aus und ziehe  auf die rechte Seite.

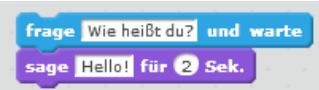
Schreibe statt "What's your name?" "Wie heißt du?".

Klicke dann mit der Maus darauf.

Merke dir: Eine Anweisung führt man aus, indem man auf sie klickt.

Gib dann deinen Namen ein und klicke auf den Haken.



Ziehe nun aus dem Bereich "Aussehen"  unter die Frage und ersetze "Hello" durch "Hallo".

Merke dir: Elemente kann man wie Puzzle-Teile aneinander setzen. Klickt man auf ein Element, so werden die Puzzleteile nacheinander ausgeführt. Man nennt das ein Programm.

Wozu gibt man eigentlich seinen Namen ein? Im Bereich "Fühlen" gibt es eine Element , das man statt eines Textes einfügen kann. Das würde dann z.B. so aussehen:



Merke dir: Runde Elemente kann man statt eines Textes einsetzen.

Aufgabe 1

Ziehe  vom Programm weg. Im Bereich Operatoren findest du das Element . Setze dieses für "Hallo" in deinem Programm ein. Ziehe nun  in das "world"-Feld. Wie hat sich dein Programm verändert?

Aufgabe 2

Nun sollst du ein Programm schreiben, das nach deinem Lieblingssessen fragt und dann sagt: "Dein Lieblingssessen ist ...", wobei ... durch die Antwort ersetzt werden soll.

Aufgabe 3

Jetzt wird es schwierig: Das Programm soll dich nach deinem Geburtstag fragen und dann ausgeben "Du bist am ... geboren." Leider gibt es hinter "world" kein weiteres Feld. Tipp:

**Aufgabe 4**

Denke dir ein Programm mit drei ineinander geschachtelten "verbinde" aus.

Programmieren mit Pocket Code (2)

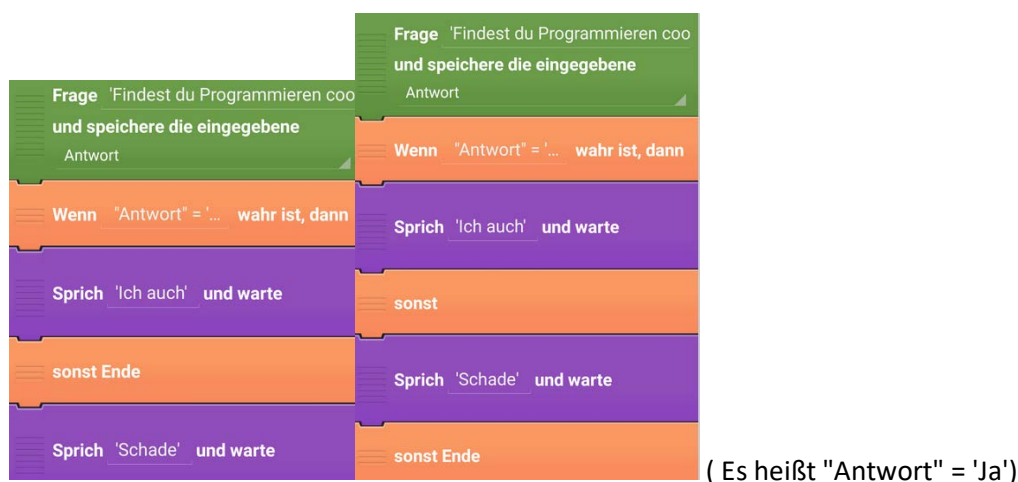
Du sollst nun ein Programm schreiben, das abhängig von der Antwort auf eine Frage unterschiedlich reagiert.

Dazu benötigt man die Verzweigung (Bereich Steuerung):



Damit kann man abhängig von einer Bedingung unterschiedliche Reaktionen auslösen.

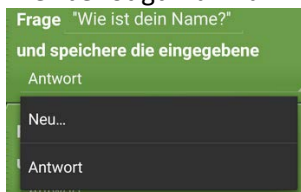
Aufgabe 1: Überlege zuerst, was die folgenden Programme machen, klicke sie dann zusammen und überprüfe ob deine Vorhersage stimmt. Was unterscheidet die beiden Varianten?



Aufgabe 2: Schreibe ein Programm, das fragt, ob man männliches Geschlecht hat. Anschließend soll ausgegeben: "Ah, du bist ein Junge!" bzw. "Ah, du bist ein Mädchen".

Aufgabe 3: Nun sollst du das Programm so ändern, dass zuerst nach dem Nachnamen gefragt wird und dann nach dem Geschlecht. Abhängig vom Geschlecht soll dann ausgegeben werden: "Guten Tag Herr (Nachname)" bzw. "Guten Tag Frau (Nachname)".

Hier benötigt man nun zwei unterschiedliche Variablen Antwort1 und Antwort2:



Klicke auf Antwort und wähle dann Neu.... Gib der Variablen den Namen Antwort1. Wähle nun Antwort1 statt Antwort.

So kann man beliebige Variablen erzeugen, die irgendwelche Informationen enthalten.

Aufgabe 4: Schreibe ein Programm, das eine Rechenaufgabe stellt. Wenn sie richtig gelöst ist, dann soll es "Super" ausgegeben, sonst soll es "Leider falsch" ausgegeben.

Programmieren mit Scratch (2)

Öffne im Browser den Link https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tip_bar=home

Du sollst nun ein Programm schreiben, das abhängig von der Antwort auf eine Frage unterschiedlich reagiert.

Dazu benötigt man die Verzweigung (Bereich Steuerung):



Damit kann man abhängig von einer Bedingung unterschiedliche Reaktionen auslösen.

Aufgabe 1: Überlege zuerst, was die folgenden Programme machen, klicke sie dann zusammen und überprüfe ob deine Vorhersage stimmt. Was unterscheidet die beiden Varianten?



Aufgabe 2: Schreibe ein Programm, das fragt, ob man männliches Geschlecht hat. Anschließend soll ausgeben: "Ah, du bist ein Junge!" bzw. "Ah, du bist ein Mädchen".

Aufgabe 3: Nun sollst du das Programm so ändern, dass zuerst nach dem Nachnamen gefragt wird und dann nach dem Geschlecht. Abhängig vom Geschlecht soll dann ausgegeben werden: "Guten Tag Herr (Nachname)" bzw. "Guten Tag Frau (Nachname)".

Hier tritt ein Problem auf, das man lösen kann, indem man sich die Antwort merkt:



Klicke im Bereich Daten auf und gib dann nachname ein. Es erscheinen nun neue Elemente

Das runde Element **nachname** kannst du wie **Antwort** verwenden.

Vorher muss du allerdings festlegen, was nachname enthalten soll. Du kannst z.B. sagen



Nun enthält nachname die Antwort.

So kann man beliebig viele Variablen erzeugen, die irgendwelche Informationen enthalten.

Aufgabe 4: Schreibe ein Programm, das eine Rechenaufgabe stellt. Wenn sie richtig gelöst ist, dann soll es "Super" ausgeben, sonst soll es "Leider falsch" ausgeben.

Programmieren mit Pocket Code (3)

Computer heißen so, weil sie besonders gut rechnen können. Bei der Multiplikationsaufgabe haben wir diese Fähigkeit gar nicht verwendet. Mit dem Formel-Editor kann man den Computer rechnen lassen.

7	8	9	+
4	5	6	×
1	2	3	-
,	0	=	÷
Abc	OK		

Sprich 4×7 und warte

Überprüfe, was die Anweisung macht.

Aufgabe 1

Schreibe ein Programm, das fragt "Was ist 4×7 ?" und dann das Ergebnis ausrechnet und abhängig davon, ob die Eingabe richtig oder falsch ist eine Rückmeldung gibt.

Aufgabe 2

Schön wäre es, wenn der Computer eine beliebige Multiplikationsaufgabe anzeigen könnte. Auch dafür findet man eine Funktion `Zufall(0,1)`. Diese Aufgabe ist super schwierig und es kann sein, dass du eine Hilfe benötigst. Diese Elemente benötigst du zur Lösung:
Die Anweisung Frage..., die Funktionen Verbinde (2mal) und Zufall (2,9) (2mal)

Aufgabe 3

Nun kannst du ein Programm schreiben, das eine beliebige Multiplikationsaufgabe stellt und auf die Eingabe reagiert.

Dazu musst du die Zufallszahl speichern (Daten, Setze Variable, a bzw. b)

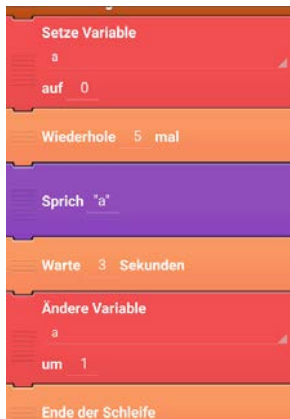


Mit der **Schleife** (Bereich Steuerung) kann man einen Programmteil wiederholen.



Aufgabe 4

Was macht wohl dieses Programm? (Daten, Neue Variable, a)



Aufgabe 5

Schreibe nun ein Programm, das 10 Multiplikationsaufgaben der Reihe nach stellt und zählt, wie viele Aufgaben richtig gelöst wurden. Ab 8 richtigen Aufgaben gibt es "Super" aus.

Programmieren mit Scratch (3)

Öffne im Browser den Link https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tip_bar=home

Computer heißen so, weil sie besonders gut rechnen können. Bei der Multiplikationsaufgabe haben wir diese Fähigkeit gar nicht verwendet. Mit dem Operator  kann man den Computer ein Produkt ausrechnen lassen.

Überprüfe, was die Anweisung  macht.

Aufgabe 1

Schreibe ein Programm, das fragt "Was ist 4*7?" und dann das Ergebnis ausrechnet und abhängig davon, ob die Eingabe richtig oder falsch ist eine Rückmeldung gibt.

Aufgabe 2

Schön wäre es, wenn der Computer eine beliebige Multiplikationsaufgabe anzeigen könnte. Auch dafür findet man einen Operator . Diese Aufgabe ist super schwierig und es kann sein, dass du eine Hilfe benötigst. Diese Elemente benötigst du zur Lösung:



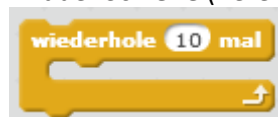
Aufgabe 3

Nun kannst du ein Programm schreiben, das eine beliebige Multiplikationsaufgabe und auf die Eingabe reagiert.

Dazu musst du die Zufallszahl speichern (Daten, Neue Variable, a bzw. b)



Mit der **Schleife** (Bereich Steuerung) kann man einen Programmteil wiederholen.



Aufgabe 4

Was macht wohl dieses Programm? (Daten, Neue Variable, a)



Aufgabe 5

Schreibe nun ein Programm, das 10 Multiplikationsaufgaben der Reihe nach stellt und zählt, wie viele Aufgaben richtig gelöst wurden. Ab 8 richtigen Aufgaben gibt es "Super" aus.

Verlaufsplan – alle drei Stunden

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Insbesondere hängt es sehr stark vom individuellen Unterrichtsverlauf ab, ob 2 oder 3 Nachmittage benötigt werden.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
Erste Stunde		
1. Einstieg Demonstration 10 Min.	L erklärt, was man unter "Programmieren" versteht und stellt die verwendete Programmierumgebung an einem Beispiel vor.	Beamer
2. Erarbeitung PA 30 Min.	SuS bearbeiten das erste Schülerblatt Evtl. wird die erste Aufgabe im Plenum erledigt. L gibt individuelle Hilfestellungen	Schülerblatt 1 Computer bzw. Smartphone (evtl. mit Kopfhörer)
3. Plenum FEU 15 Min.	Die Lösungen der Aufgaben werden vorgestellt.	Beamer
Zweite Stunde		
1. Einstieg FEU 10 Min.	Wiederholung der wesentlichen Ergebnisse der letzten Stunde.	Beamer
2. Problemstellung FEU 10 Min.	Intensive Vorbereitung der Partnerarbeit, z.B. indem man die Verzweigung an Alltagssituationen bespricht, die zugehörigen Anweisungsblöcke verdeutlicht, usw.	
3. Erarbeitung PA 25 Min.	Schülerblatt 2	Schülerblatt 2 Computer bzw. Smartphone (evtl. mit Kopfhörer)
Dritte Stunde		
1. Einstieg FEU 10 Min.	Wiederholung der wesentlichen Ergebnisse der letzten Stunde.	Beamer
2. Erarbeitung PA 15 Min.	Schülerblatt 3 Aufgabe 1 bis 3	Schülerblatt 3 Computer bzw. Smartphone
3. Ergebnisse Plenum 10 Min.	Besprechung der Aufgaben	Beamer
4. Lehrervortrag 5 Min.	Die Schleife als Steuerungselement	
5. Erarbeitung 20 Min.	Schülerblatt 3 – Aufgabe 4 und 5	Computer...
6. Zusammenfassung 5 Min.	Vorstellung der fertigen Programme	Beamer
7. Ergänzungen	Mögliche Erweiterungen der Aufgabe mit Lob auf verschiedenen Stufen	Computer...

Sachanalyse

Funktionen der Form $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man reelle Zahlenfolgen, kurz **Folgen**.

$\mathbb{N}$ sei hier die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Beispiel: f mit $f(n) = 2n + 1$.

Durch die „eingeschränkte“ Definitionsmenge lassen sich die Funktionswerte (man sagt: die Folgenglieder) der Reihe nach aufschreiben, hier: 1; 3; 5; 7; ...

Außer der **expliziten Festlegung** mithilfe eines Funktionsterms eröffnet dies die Möglichkeit der so genannten **rekursiven Festlegung** unter Verwendung eines Anfangswertes und einer Rekursionsvorschrift (z.B. $f(0) = 1$ und $f(n) = f(n-1) + 2$ für $n > 0$).

Arithmetische Folgen sind explizit festgelegt durch einen Term der Form $b \cdot n + a$ bzw.

rekursiv durch $f(0) = a$ und $f(n) = f(n-1) + b$ für $n > 0$.

Geometrische Folgen sind explizit festgelegt durch einen Term der Form $a \cdot b^n$ bzw.

rekursiv durch $f(0) = a$ und $f(n) = b \cdot f(n-1)$ für $n > 0$, jeweils für reelle a und b .

Zum Beispiel durch Ausmultiplizieren erkennt man, dass für die Folge f der **Quadratzahlen** ($f(n) = n^2$ mit dem Folgenanfang 0; 1; 4; 9; 16; 25; ...) die rekursive Darstellung mit **$f(0) = 0$ und $f(n) = f(n-1) + (2n - 1)$** für $n > 0$ gilt.

Man addiert also der Reihe nach die ungeraden Zahlen.

Wegen $f(n) = f(n-1) + (2n - 1) = f(n-1) + (n - 1) + n$ könnte man sich die Rekursion auch so merken:

Die nächste Quadratzahl erhältst du, indem du die alte und die neue Basis addierst.

$$7^2 = 6^2 + 6 + 7$$

Ein beliebtes Aufgabenformat – in jeder Art von „Intelligenz“-Tests – ist das Auffinden einer Rekursionsvorschrift bzw. einer Fortsetzung zu einem gegebenen Folgenanfang.

Eine aus mathematischer Sicht verwandte Aufgabenstellung ist das Auffinden eines Folgenterms zu einem Folgenanfang bzw. zu einer gegebenen Rekursion.

Es liegt auf der Hand, dass die **Fortsetzung eines Folgenanfangs nicht eindeutig** ist, die Annahme des Gegenteils ist ein weit verbreitetes Missverständnis.

Zum Beispiel sind mögliche Folgenterme zum Folgenanfang $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$:

2^n ; $0,5 \cdot n^2 + 0,5 \cdot n + 1$; $n^3 - 2,5 \cdot n^2 + 2,5 \cdot n + 1$; $2n^3 - 5,5 \cdot n^2 + 4,5 \cdot n + 1$; $3n^3 - 8,5 \cdot n^2 + 6,5 \cdot n + 1$ usw.

Allgemein findet man zu jedem Folgenanfang der Länge $k+1$ eindeutig ein Polynom maximal k -ten Grades und damit natürlich unendlich viele weitere höheren Grades.

Interpolationsformel von LAGRANGE für das obige Beispiel:

$$P(x) = 1 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(0-1) \cdot (0-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(1-0) \cdot (1-2)} + 4 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1)}{(2-0) \cdot (2-1)}$$

Eine geniale Konstruktion: Setzt man für x die Zahlen 0; 1 oder 2 ein, so haben stets zwei der drei Brüche den Wert 0, der dritte den Wert 1. Durch die Gewichtung mit dem betreffenden Funktionswert erhält man das Gewünschte.

Lehrerblatt

Didaktische Bemerkungen und Unterrichtsablauf:

Es kommen **drei Aufgabenformate** mit jeweils einem Schüler-Arbeitsblatt vor

- zu einer gegebenen Rekursion einen Folgenanfang weiterführen
- zu einem Folgenanfang eine Rekursion finden (hier ist, ohne dies weiter zu thematisieren, an die „nächstliegende“ Rekursion gedacht) und den Anfang fortsetzen
- zu gegebenen Folgengliedern (hier: $n \geq 1$) einen Folgenterm finden

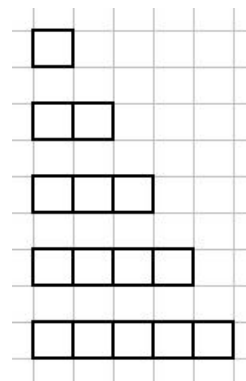
Zum Einstieg:

Zunächst: Wiederholung der Quadratzahlen (bis 15^2) und der Zweierpotenzen (bis 2^6) in spielerischer Form z.B. Mathe-Fußball o.ä.

Dann: Erörterung der Fragen zur Quadrat-Figurenfolge (vgl. Abb. rechts):

- Aus wie vielen Strecken besteht jede Figur?
- Wie viele Strecken kommen von einer Figur zur nächsten dazu (rekursiv)?
- Wie kann man von der Anzahl der Quadrate in einer Figur direkt auf die Anzahl der Strecken schließen (explizit)?

[Folge: 4; 7; 10; 13; 16; ... | „immer „+3“ | Anzahl $\cdot 3 + 1$]



Vor der Bearbeitung der Schülerblätter wird man jeweils zunächst **einige Beispiele gemeinsam** (s.u.) machen und die SuS dann selbständig rechnen lassen. Die Lehrkraft kontrolliert, ob die SuS die **angebotene Problemöglichkeit** wahrnehmen – sie sollen die erfolgreich durchgeführte Probe mit einem „✓“ bestätigen – auch bei Schüler-Arbeitsblatt 3: die vermutete Regel soll an den Zahlenpaaren der Tabelle verifiziert werden.

Das Suchfeld bei den Arbeitsblättern bewegt sich hauptsächlich im Bereich der arithmetischen und geometrischen Folgen, sowie der Folge der Quadratzahlen (s.o.).

Zum Schüler-Arbeitsblatt 1: (rekursiv – Blickrichtung: von links nach rechts)

- Addiere immer 2,7: Startzahl: 4,5
- Multipliziere immer mit 3; Startzahl: 1
- Addiere immer 2 und nimm dann den Kehrwert: Startzahl 1

Zum Schüler-Arbeitsblatt 2: (rekursiv – Blickrichtung: von links nach rechts)

- 5; 4,85; 4,7; 4,55; ... → subtrahiere immer 0,15
- 1600; 800; 400; 200; ... → dividiere immer durch 2
- 225; 196; 169; 144; ... → Quadratzahlen rückwärts

Zum Schüler-Arbeitsblatt 3: (explizit – Blickrichtung: paarweise von oben nach unten)

1	2	3	4	5	Nummer
1,5	3	4,5	6	7,5	→ Nummer mal 1,5
1	2	3	4	5	Nummer
12	22	32	42	52	→ Nummer mal 10 plus 2
1	2	3	4	5	Nummer
1	8	27	64	125	→ Nummer hoch 3

Ziele:

- Kopfrechnen – auch: Brüche und Dezimalzahlen
- Kenntnis der Quadratzahlen und Zweierpotenzen

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen **Zahl** (Probe!).

1.) Addiere immer 7: 3; 10; 17;;;;;; **59**

2.) Subtrahiere immer 9: 433; 424; 415;;;;;; **361**

3.) Addiere immer 1,3: 1; 2,3; 3,6;;;;;; **11,4**

4.) Addiere immer 0,6: 2,5; 3,1; 3,7;;;;;; **7,3**

5.) Subtrahiere immer 0,8: 20; 19,2; 18,4;;;;;; **13,6**

6.) Subtrahiere immer 1,4: 100; 98,6; 97,2;;;;;; **88,8**

7.) Multipliziere immer mit 2: 2; 4; 8;;;;;; **1024**

8.) Multipliziere immer mit 5: 0,008; 0,04;;;;;; **625**

9.) Dividiere immer durch 2: 1536; 768; 384;;;;;; **3**

10.) Dividiere immer durch 5: 125000; 25000; 5000;;;;;; **1,6**

11.) Multipliziere immer mit 0,2: 625; 125; 25;;;;;; **0,04**

12.) Multipliziere immer mit -2: 1; -2; 4;;;;;; **256**

13.) Addiere der Reihe nach die ungeraden Zahlen 9; 11; 13; 15 usw.:

16; 25; 36; 49;;;;;; **169**

14.) Addiere 1 und nimm anschließend den Kehrwert: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$;;;;;; **$\frac{21}{34}$**

15.) Addiere der Reihe nach $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; usw.: 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$;;;;;; **$\frac{63}{64}$**

** Wie heißt der nächste Buchstabe in dieser Folge? A; C; F; J; O; ?

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen Zahl (Probe!). Lösungen

- 1.) Addiere immer 7: 3; 10; 17; 24; 31; 38; 45; 52; 59 ✓
- 2.) Subtrahiere immer 9: 433; 424; 415; 406; 397; 388; 379; 370; 361 ✓
- 3.) Addiere immer 1,3: 1; 2,3; 3,6; 4,9; 6,2; 7,5; 8,8; 10,1; 11,4 ✓
- 4.) Addiere immer 0,6: 2,5; 3,1; 3,7; 4,3; 4,9; 5,5; 6,1; 6,7; 7,3 ✓
- 5.) Subtrahiere immer 0,8: 20; 19,2; 18,4; 17,6; 16,8; 16,0; 15,2; 14,4; 13,6 ✓
- 6.) Subtrahiere immer 1,4: 100; 98,6; 97,2; 95,8; 94,4; 93,0; 91,6; 90,2; 88,8 ✓
- 7.) Multipliziere immer mit 2: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024 ✓
- 8.) Multipliziere immer mit 5: 0,008; 0,04; 0,2; 1; 5; 25; 125; 625 ✓
- 9.) Dividiere immer durch 2: 1536; 768; 384; 192; 96; 48; 24; 12; 6; 3 ✓
- 10.) Dividiere immer durch 5: 125000; 25000; 5000; 1000; 200; 40; 8; 1,6 ✓
- 11.) Multipliziere immer mit 0,2: 625; 125; 25; 5; 1; 0,2; 0,04 ✓
- 12.) Multipliziere immer mit -2: 1; -2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256 ✓
- 13.) Addiere der Reihe nach die ungeraden Zahlen 9; 11; 13; 15 usw.:
16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169 ✓
- 14.) Addiere 1 und nimm anschließend den Kehrwert: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{8}{13}$; $\frac{13}{21}$; $\frac{21}{34}$ ✓
- 15.) Addiere der Reihe nach $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; usw.: 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{31}{32}$; $\frac{63}{64}$ ✓

** Wie heißt der nächste Buchstabe in dieser Folge? A, C, F, J, O; ? Der nächste Buchstabe heißt: U.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2		3					4							5										

 Buchstaben dazwischen

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen **Zahl** (Probe!) und gib an, wie du von einer Zahl zur nächsten kommst.

1.) 3; 9; 15; 21;;;;; **51**

2.) 3; 4,5; 6; 7,5;;;;; **15**

3.) 14; 11,5; 9; 6,5;;;; **-3,5**

4.) 0,03; 0,06; 0,12; 0,24;;;; **3,84**

5.) 0,02; 0,1; 0,18; 0,26;;;;; **0,66**

6.) -26; -21; -16; -11;;;;; **19**

7.) 20,48; 10,24; 5,12; 2,56;;;;; **0,04**

8.) 31; 25,5; 20; 14,5;;;;; **-18,5**

9.) 36; 49; 64; 81;;;;; **225**

10.) 5; 6; 8; 11; 15;;;;; **50**

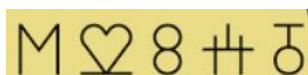
11.) 3; 4; 2; 5; 1;;;;; **-2**

12.) -21; -19; -15; -9;;;;; **69**

13.) 2181; 729; 243; 81;;;;; **$\frac{1}{9}$**

14.) 81; 27; 54; 18;;;;; **16**

** Wie geht es weiter?

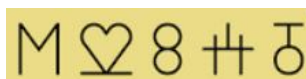


.....

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen **Zahl** (Probe!) und gib an, wie du von einer Zahl zur nächsten kommst. **Lösungen**

- 1.) 3; 9; 15; 21; 27; 33; 39; 45; 51 ✓ → immer 6 addieren
- 2.) 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15 ✓ → immer 1,5 addieren
- 3.) 14; 11,5; 9; 6,5; 4; 1,5; -1; -3,5 ✓ → immer 2,5 subtrahieren
- 4.) 0,03; 0,06; 0,12; 0,24; 0,48; 0,96; 1,92; 3,84 ✓ → immer mit 2 multiplizieren
- 5.) 0,02; 0,1; 0,18; 0,26; 0,34; 0,42; 0,50; 0,58; 0,66 ✓ → immer 0,8 addieren
- 6.) -26; -21; -16; -11; -6; -1; 4; 9; 14; 19 ✓ → immer 5 addieren
- 7.) 20,48; 10,24; 5,12; 2,56; 1,28; 0,64; 0,32; 0,16; 0,08; 0,04 ✓ → immer durch 2 dividieren
- 8.) 31; 25,5; 20; 14,5; 9; 3,5; -2; -7,5; -13; -18,5 ✓ → immer 5,5 subtrahieren
- 9.) 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225 ✓ → Quadratzahlen
- 10.) 5; 6; 8; 11; 15; 20; 26; 33; 41; 50 ✓ → +1 | +2 | +3 | +4 usw.
- 11.) 3; 4; 2; 5; 1; 6; 0; 7; -1; 8; 2 ✓ → +1 | -2 | +3 | -4 usw.
- 12.) -21; -19; -15; -9; -1; 9; 21; 35; 51; 69 ✓ → +2 | +4 | +6 | +8 usw.
- 13.) 2181; 729; 243; 81; 27; 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$ ✓ → immer durch 3 dividieren
- 14.) 81; 27; 54; 18; 36; 12; 24; 8; 16 ✓ → :3 | · 2 | :3 | · 2 usw.

** Wie geht es weiter?



Etwa so:



Hier stehen die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 jeweils mit Spiegelbild (Spiegelachse am linken Rand der Ziffer).

Finde eine Regel, wie man mit der Nummer des Folgenglieds seinen Wert ausrechnen kann.

1.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	5	6	7	8	9	10

2.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	8	12	16	20	24	28

3.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	0,5		0,25	0,2		

Tipp: Schreibe die Werte jeweils als Bruch.

4.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	4	9	16	25	36	49

5.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	-4	-3	-2	-1	0	1	2

6.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1

7.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	105	205	305	405	505	605	705

8.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	16	25	36	49	64	81	100

9.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	2	4	8	16	32	64	128

Finde eine Regel, wie man mit der Nummer des Folgenglieds seinen Wert ausrechnen kann **Lösungen**
1.) Regel: **Nummer plus 3**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4 ✓	5 ✓	6 ✓	7 ✓	8 ✓	9 ✓	10 ✓

2.) Regel: **Nummer mal 4**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4 ✓	8 ✓	12 ✓	16 ✓	20 ✓	24 ✓	28 ✓

3.) Regel: **Kehrwert der Nummer (oder: 1 geteilt durch die Nummer)**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1 ✓	$0,5 = \frac{1}{2}$ ✓		$0,25 = \frac{1}{4}$ ✓	$0,2 = \frac{1}{5}$ ✓		

Tipp: Schreibe die Werte jeweils als Bruch.

4.) Regel: **Nummer mal Nummer (oder: Nummer zum Quadrat)**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1 ✓	4 ✓	9 ✓	16 ✓	25 ✓	36 ✓	49 ✓

5.) Regel: **Nummer minus 5**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	-4 ✓	-3 ✓	-2 ✓	-1 ✓	0 ✓	1 ✓	2 ✓

6.) Regel: **Nummer mal 0,3**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	0,3 ✓	0,6 ✓	0,9 ✓	1,2 ✓	1,5 ✓	1,8 ✓	2,1 ✓

7.) Regel: **Nummer mal 100 plus 5**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	105 ✓	205 ✓	305 ✓	405 ✓	505 ✓	605 ✓	705 ✓

8.) Regel: **Nummer plus 3 zum Quadrat**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	16 ✓	25 ✓	36 ✓	49 ✓	64 ✓	81 ✓	100 ✓

9.) Regel: **2 hoch Nummer**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	2 ✓	4 ✓	8 ✓	16 ✓	32 ✓	64 ✓	128 ✓

Sachanalyse

Funktionen der Form $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man reelle Zahlenfolgen, kurz **Folgen**.

$\mathbb{N}$ sei hier die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Beispiel: f mit $f(n) = 2n + 1$.

Durch die „eingeschränkte“ Definitionsmenge lassen sich die Funktionswerte (man sagt: die Folgenglieder) der Reihe nach aufschreiben, hier: 1; 3; 5; 7; ...

Außer der **expliziten Festlegung** mithilfe eines Funktionsterms eröffnet dies die Möglichkeit der so genannten **rekursiven Festlegung** unter Verwendung eines Anfangswertes und einer Rekursionsvorschrift (z.B. $f(0) = 1$ und $f(n) = f(n-1) + 2$ für $n > 0$).

Arithmetische Folgen sind explizit festgelegt durch einen Term der Form $b \cdot n + a$ bzw.

rekursiv durch $f(0) = a$ und $f(n) = f(n-1) + b$ für $n > 0$.

Geometrische Folgen sind explizit festgelegt durch einen Term der Form $a \cdot b^n$ bzw.

rekursiv durch $f(0) = a$ und $f(n) = b \cdot f(n-1)$ für $n > 0$, jeweils für reelle a und b .

Zum Beispiel durch Ausmultiplizieren erkennt man, dass für die Folge f der **Quadratzahlen** ($f(n) = n^2$ mit dem Folgenanfang 0; 1; 4; 9; 16; 25; ...) die rekursive Darstellung mit $f(0) = 0$ und $f(n) = f(n-1) + (2n - 1)$ für $n > 0$ gilt.

Man addiert also der Reihe nach die ungeraden Zahlen.

Wegen $f(n) = f(n-1) + (2n - 1) = f(n-1) + (n - 1) + n$ könnte man sich die Rekursion auch so merken:

Die nächste Quadratzahl erhältst du, indem du die alte und die neue Basis addierst.

$$7^2 = 6^2 + 6 + 7$$

Ein beliebtes Aufgabenformat – in jeder Art von „Intelligenz“-Tests – ist das Auffinden einer Rekursionsvorschrift bzw. einer Fortsetzung zu einem gegebenen Folgenanfang.

Eine aus mathematischer Sicht verwandte Aufgabenstellung ist das Auffinden eines Folgenterms zu einem Folgenanfang bzw. zu einer gegebenen Rekursion.

Es liegt auf der Hand, dass die **Fortsetzung eines Folgenanfangs nicht eindeutig** ist.

Zum Beispiel sind mögliche Folgenterme zum Folgenanfang $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$:

2^n ; $0,5 \cdot n^2 + 0,5 \cdot n + 1$; $n^3 - 2,5 \cdot n^2 + 2,5 \cdot n + 1$; $2n^3 - 5,5 \cdot n^2 + 4,5 \cdot n + 1$; $3n^3 - 8,5 \cdot n^2 + 6,5 \cdot n + 1$ usw.

Allgemein findet man zu jedem Folgenanfang der Länge $k+1$ eindeutig ein Polynom maximal k -ten Grades und damit natürlich unendlich viele weitere.

Interpolationsformel von LAGRANGE für das obige Beispiel:

$$P(x) = 1 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(0-1) \cdot (0-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(1-0) \cdot (1-2)} + 4 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1)}{(2-0) \cdot (2-1)}$$

Eine geniale Konstruktion: Setzt man für x die Zahlen 0; 1 oder 2 ein, so haben stets zwei der drei Brüche den Wert 0, der dritte den Wert 1. Durch die Gewichtung mit dem betreffenden Funktionswert erhält man das Gewünschte.

Lehrerblatt

Didaktische Bemerkungen und Unterrichtsablauf:

Es kommen **drei Aufgabenformate** mit jeweils einem Schüler-Arbeitsblatt vor

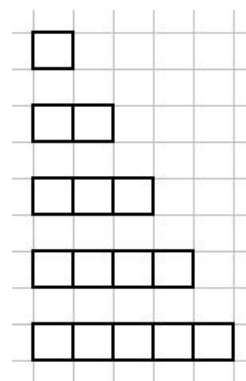
- zu einer gegebenen Rekursion einen Folgenanfang weiterführen
- zu einem Folgenanfang eine Rekursion finden (hier ist, ohne dies weiter zu thematisieren, an die „nächstliegende“ Rekursion gedacht) und den Anfang fortsetzen
- zu gegebenen Folgengliedern (hier: $n \geq 1$) einen Folgenterm finden

Zum Einstieg:

Zunächst: Wiederholung der Quadratzahlen (bis 20^2) und der Zweierpotenzen (bis 2^{10}) in spielerischer Form z.B. Mathe-Fußball o.ä.

Dann: Erörterung der Fragen zur Quadrat-Figurenfolge (vgl. Abb. rechts):

- Aus wie vielen Strecken besteht jede Figur?
- Wie viele Strecken kommen von einer Figur zur nächsten dazu (Rekursion)?
- Wie kann man von der Anzahl der Quadrate in einer Figur direkt auf die Anzahl der Strecken schließen?



Bei den Schüler-Arbeitsblättern wird man zunächst **einige Beispiele gemeinsam** (s.u.) machen und die SuS dann selbstständig rechnen lassen. Das Suchfeld bei den Arbeitsblättern bewegt sich hauptsächlich im Bereich der arithmetischen und geometrischen Folgen, sowie der Folge der Quadratzahlen (s.o.).

Zum Schüler-Arbeitsblatt 1:

- Addiere immer 2,7: Startzahl: 4,5
- Multipliziere immer mit 3; Startzahl: 1
- Addiere immer 2 und nimm dann den Kehrwert: Startzahl 1

Zum Schüler-Arbeitsblatt 2:

- 5; 4,85; 4,7; 4,55; ...
- 1600; 800; 400; 200; ...
- 289; 256; 225; 196; ...

Zum Schüler-Arbeitsblatt 3:

1	2	3	4	Nummer
12	22	32	42	→ Nummer mal 10 plus 2
1	2	3	4	Nummer
6	3	2	1,5	→ 6 geteilt durch Nummer
1	2	3	4	Nummer
1	8	27	64	→ Nummer hoch 3

Ziele:

- Kopfrechnen (auch: Brüche und Dezimalzahlen)
- Kenntnis der Quadratzahlen und Zweierpotenzen

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen Zahl (Probe!).

1.) Addiere immer 7: 3; 10; 17;;;;;; 59

2.) Subtrahiere immer 9: 433; 424; 415;;;;;; 361

3.) Addiere immer 1,3: 1; 2,3; 3,6;;;;;; 11,4

4.) Addiere immer 0,6: 2,5; 3,1; 3,7;;;;;; 7,3

5.) Subtrahiere immer 0,8: 20; 19,2; 18,4;;;;;; 13,6

6.) Subtrahiere immer 1,4: 100; 98,6; 97,2;;;;;; 88,8

7.) Multipliziere immer mit 2: 2; 4; 8;;;;;; 1024

8.) Multipliziere immer mit 5: 0,00032; 0,0016; 0,008;;;;;; 25

9.) Dividiere immer durch 2: 768; 384; 192;;;;;; 3

10.) Dividiere immer durch 5: 25000; 5000; 1000;;;;;; 0,32

11.) Multipliziere immer mit 0,4: 781,25; 312,5; 125;;;;;; 3,2

12.) Multipliziere immer mit -2: 1; -2; 4;;;;;; 256

13.) Addiere der Reihe nach die ungeraden Zahlen 9; 11; 13; 15 usw.:

16; 25; 36; 49;;;;;; 169

14.) Addiere der Reihe nach die Zahlen 1; -2; 3; -4; 5 usw.: 0; 1; -1; 2;;;;;; 4

15.) Addiere 1 und nimm anschließend den Kehrwert: $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \dots; \dots; \dots; \dots; \dots; \frac{21}{34}$

16.) Addiere der Reihe nach $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; 0; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \dots; \dots; \dots; \frac{63}{64}$

** Wie heißt der nächste Buchstabe in dieser Folge? A; C; F; J; O; ?

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen Zahl (Probe!) und gib an, wie du von einer Zahl zur nächsten kommst.

- 1.) 3; 9; 15;;;;;;; 51
- 2.) 3; 2,89; 2,78;;;;;;; 2,12
- 3.) 3; 2,2; 1,4;;;;;;; -4,2
- 4.) 0,02; 0,1; 0,5;;;; 312,5
- 5.) 0,02; 0,1; 0,18;;;;;;; 0,66
- 6.) -11; -6; -1;;;;;;; 29
- 7.) 10,24; 5,12; 2,56;;;;;;; 0,04
- 8.) 25,5; 20; 14,5;;;;;;; -18,5
- 9.) 36; 49; 64; 81;;;;;;; 225
- 10.) 5; 6; 8; 11;;;;;;; 50
- 11.) 3; 4; 2; 5; 1;;;;;;; -2
- 12.) -11; -10; -8; -5;;;;;;; 34
- 13.) 729; 243; 81;;;;;;; $\frac{1}{9}$
- 14.) $-\frac{2}{3}$; 2; -6;;;;;;; 1458
- 15.) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1;;;;;;; 3

** Wie geht es weiter? M ♡ 8 † ♂

Finde eine Regel, wie man mit der Nummer des Folgenglieds seinen Wert ausrechnen kann.

1.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	5	6	7	8	9	10

2.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	8	12	16	20	24	28

3.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	0,5		0,25	0,2		

4.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	4	9	16	25	36	49

5.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	-4	-3	-2	-1	0	1	2

6.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1

7.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	2	5	10	17	26	37	50

8.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	16	25	36	49	64	81	100

9.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	8	16	32	64	128	256	512

10.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	2		1	0,8		

11.) Regel:

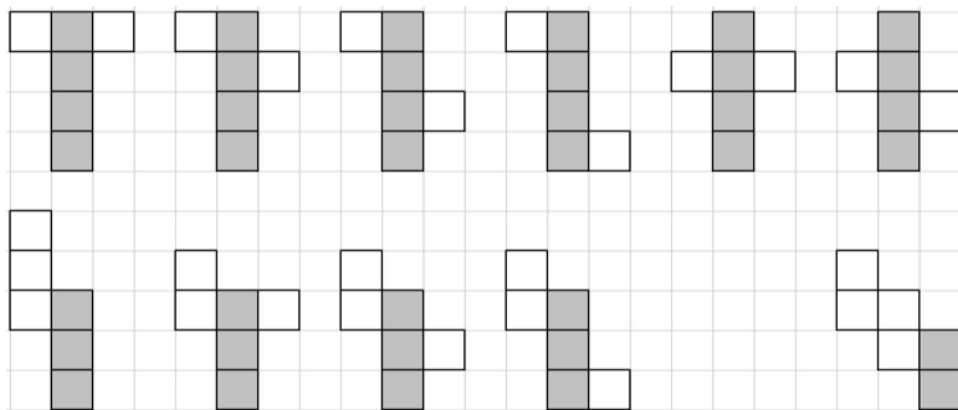
Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	6	11	16	21	26	31	36

12.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	7	10	13	16	19	22	25

Sachanalyse

Hexominos („Quadratsechslinge“), die sich zu einem Würfel zusammenfügen lassen, nennt man Würfelnetze. Es gibt **11 Würfelnetze**, s.u., die Anordnung vermittelt eine mögliche Systematik. Würfelnetze, die sich durch Spiegelung, Drehung oder Verschiebung auf einander abbilden lassen, also kongruent sind, werden bei dieser Zählung als gleich angesehen.



Zwei Fragen stellen sich:

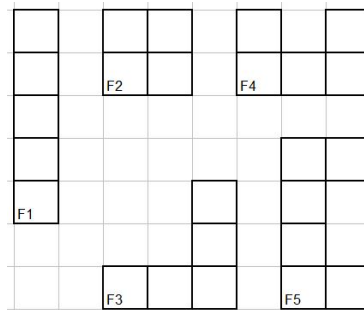
- **Handelt es sich bei den dargestellten Hexominos tatsächlich um Würfelnetze?**

→ Antwort: Das lässt sich durch Falten bzw. Zusammenfügen (in der Vorstellung oder mithilfe von ausgeschnittenem Papier oder Steckerle) überprüfen.

- **Wie kann man sicher sein, dass es alle sind?**

→ Antwort: Hier hilft eine Reihe von Feststellungen **F1** bis **F7**:

F1 bis F4: Hexominos, die fünf Quadrate in einer Reihe (**F1**) oder die vier Quadrate in Form eines großen Quadrates (**F2**) oder die fünf Quadrate in Form eines „Hakens“ (**F3**) oder fünf Quadrate in Form eines „U“ enthalten (**F4**) können sicher keine Würfelnetze sein.

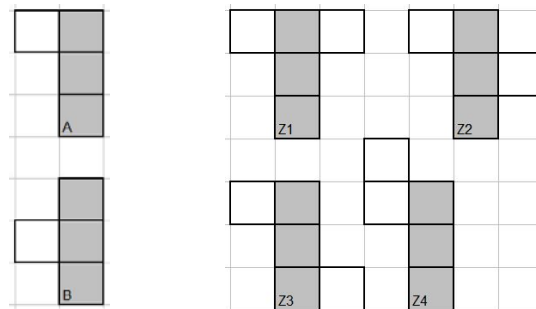


F5: Bei Hexominos, die vier Quadrate in einer Reihe enthalten (diese Reihe bildet dann einen „Gürtel“ um den Würfel), können die restlichen beiden Quadrate nicht auf derselben Seite liegen.

Die zugehörigen Netze mit „Viererstange“ kann man durch systematisches Probieren finden, vgl. die erste Zeile in der Abbildung oben.

F6: Das Suchfeld ist jetzt eingengt, es dürfen nur noch drei Quadrate in einer Reihe vorkommen. Ausgehend von dieser „Dreierstange“ kann man ein viertes Quadrat jetzt nur noch seitlich anbringen, und zwar nur auf die beiden Arten A und B.

Durch systematisches Probieren unter Beachtung von F2, F3 oder F4 erhält man die vier Zwischenstufen Z1 bis Z4 und aus diesen schließlich alle Würfelnetze mit einer „Dreierstange“, es sind ebenfalls vier, s.o.



F7: Geht es auch ohne „Dreierstange“? Ja, aber nur auf eine Art, diese ergibt sich jetzt zwangsläufig unter Beachtung von F2.

Metaphorische Bezeichnungen wie „Viererstange“ usw. können zur Verständigung hilfreich sein.

Lehrerblatt

Didaktischer Kommentar

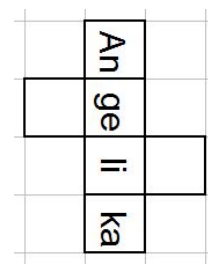
Außerhalb des Plenums arbeiten die Schüler zu einer vorgegebenen Problemstellung in der Regel themengleich alleine oder mit einem Partner. Im Gegensatz dazu ist das Projekt „Findet alle Würfelnetze.“ – Die Vector Stiftung vergibt einen Preis!“ als **Teamarbeit der gesamten Lerngruppe** angelegt. Das Gesamtprodukt, das ist die Angabe der vollständigen Sammlung der elf Würfelnetze, lässt sich im vorgegebenen Zeitrahmen wohl nur arbeitsteilig von der gesamten Gruppe erstellen. Dies könnte für die Schüler eine wichtige grundlegende Erfahrung sein.

Die Suche nach Würfelnetzen ist in natürlicher Weise **selbstdifferenzierend**. Der eine Schüler findet mehr Würfelnetze oder Muster, die nicht in Würfelnetzen enthalten sein können, der andere weniger. Bei der Identifizierung von Hexominos als Würfelnetze verwenden Schüler bereitgestellte Steckerle oder sie bewältigen diese Aufgabe gedanklich usw.

Für den Überblick des Lehrers über das Geschehen ist es hilfreich, die elf Würfelnetze auswendig zu kennen. Er wird sich dabei sinnvollerweise an der Systematik der Abbildung auf dem Lehrerblatt orientieren. Die Lehrer sollte den gesamten Suchprozess einmal selbst aktiv durchlaufen haben.

Der **Ablauf** gliedert sich wie folgt:

- Die Schüler suchen „frei“ nach Würfelnetzen, schneiden diese aus und kennzeichnen die gefundenen Beispiele mit ihrem Namen. Dies offenbart den Beitrag Einzelner an der Gesamtleistung. Der Lehrer wird darauf achten, dass beim „Schlussbild“ die Namen aller Teilnehmer einmal vorkommen.
- Beim Suchen identifizieren sie auch Muster, die in einem Würfelnetz nicht enthalten sein können („No-Go-Muster“). Auch dies soll durch Ausschneiden dokumentiert und z.B. mit einem „Blitz“ gekennzeichnet werden.
- In einem ersten Plenum werden kongruente Würfelnetze durch Aufeinanderlegen als „gleich“ erkannt. Die Schüler machen Vorschläge für eine Einteilung der Würfelnetze in Klassen. Die Einteilung nach dem Auftreten von „Viererstangen“, „Dreierstangen“ und „Zweierstangen“ ist nicht unbedingt zwingend. Hier darf der Lehrer ggf. ein bisschen lenken.
- In einer zweiten Erarbeitungsphase arbeiten die Schüler in den drei Gruppen „Viererstange“, „Dreierstange“ und „Zweierstange“ zielgerichtet zur Aufgabe „Findet alle Würfelnetze mit Viererstange, probiere alle Möglichkeiten aus.“ usw.
- In einem abschließenden Plenum werden die Ergebnisse dokumentiert.



Ziele:

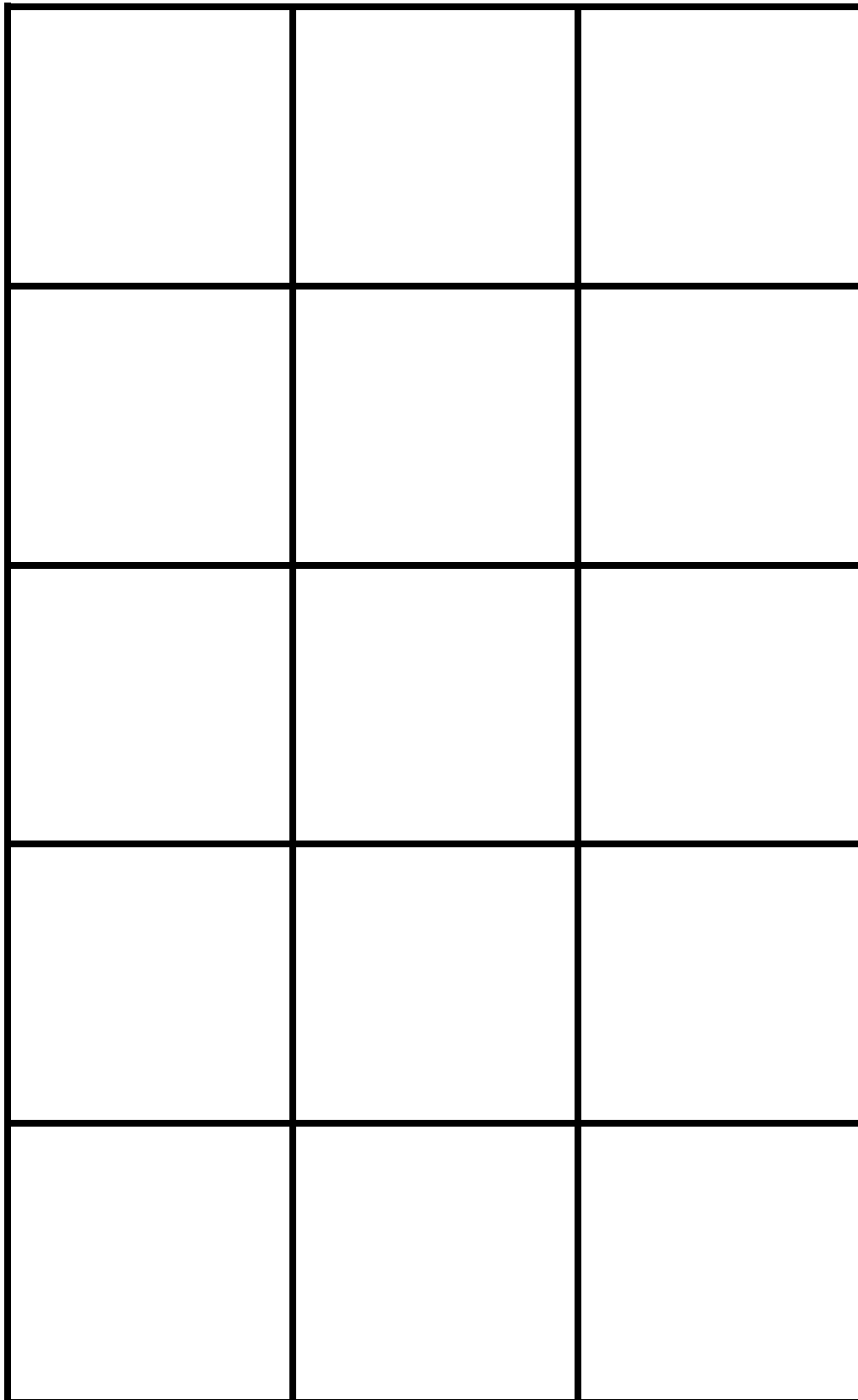
- die folgenden Problemlösestrategien kennen lernen bzw. erproben
- ein Problem in Teilprobleme aufspalten
- alle Fälle der Reihe nach abhandeln
- systematisches Probieren
- das räumliche Vorstellungsvermögen weiter entwickeln
- sich an mathematischer Betätigung erfreuen



Material:

- Schnittbogen und Scheren in ausreichender Anzahl, evtl. Farbstifte
- Magnete zur Fixierung der ausgeschnittenen Netze an der Tafel
- **quadratische Steckerle** (vgl. Bilder) zum Ausprobieren





😊 Damit es schöner aussieht: Am Außenrand der schwarzen Linien ausschneiden!

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

(In Texten der leichten Lesbarkeit halber: „Schüler“ bzw. „Lehrer“)

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird der Lehrer stärker oder weniger stark lenken bzw. die 6. Phase weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 10 Min.	L stellt das Projekt „Findet alle Würfelnetze.“ vor, zeigt - dabei das wohl bekannteste Würfelnetz („Kreuz“) und - die „Fünferstange“ als Muster, das nicht in einem Würfelnetz enthalten sein kann („No-Go-Muster“). L stellt einen Preis, vergeben durch die Vector-Stiftung, in Aussicht.	Würfelnetz „Kreuz“ und „Fünferstange“ als Modell oder Tafelzeichnung
2. Erarbeitung I EA/PA 20 Min.	SuS - suchen zunächst unstrukturiert nach Würfelnetzen und „No-Go-Mustern“ - versehen diese mit ihrem Namen und - befestigen sie mit Magneten an der Tafel. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	- Steckerle - Schnittbogen - Scheren - Magnete
3. Plenum I FEU 15 Min.	L thematisiert die „Gleichheit“ von Würfelnetzen. SuS - identifizieren gleiche Würfelnetze und - begründen und kennzeichnen die „No-Go-Muster“. L initiiert ggf. eine Ergänzung. SuS machen Vorschläge zur Gruppenbildung. L lenkt dabei auf die Klassenbildung nach Länge der „Stangen“.	Ausgeschnittene Würfelnetze und „No-Go-Muster“ an der Tafel
4. Erarbeitung II EA/PA 15 Min.	SuS - suchen in den drei Gruppen („Viererstange“, „Dreierstange“ und „Zweierstange“) nach den noch fehlenden Würfelnetzen und - begründen durch systematische Betrachtung aller möglichen Fälle, dass es keine weiteren geben kann. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	- Steckerle - Schnittbogen - Scheren - Magnete
5. Plenum II FEU 15 Min.	SuS: Die Gruppen berichten den anderen von ihrer Tätigkeit. Die Gruppe „Dreierstange“ hat hierbei den komplexesten Part erwischt. Ggf. erst nach der Erarbeitung IV: SuS und L fotografieren die vollständige Sammlung an der Tafel und schicken das Bild an: christina.luger@vector-stiftung.de	Ausgeschnittene Würfelnetze und „No-Go-Muster“ an der Tafel
6. Erarbeitung III FEU 10 Min.	L und SuS betrachten im Detail alle Möglichkeiten zur „Dreierstange“ (vgl. Sachanalyse) und beziehen sich dabei auf die „No-Go-Muster“ F2 bis F4	L zeichnet an der Tafel
6. Erarbeitung IV EA/PA 5 Min.	SuS färben bei den elf Würfelnetzen die im Würfel gegenüberliegenden Quadrate gleich	Farbstifte

Lehrerblatt**Ziel der Stunde**

Die SuS sollen anhand von Aufgabe 4 das systematische Probieren einüben. Die Aufgabe stammt aus der Begabtenförderung und ist ziemlich schwierig. Deshalb müsste das Kompetenzerleben besonders groß sein. Es birgt damit aber auch die Gefahr von Frustration, die unbedingt durch geschicktes helfen zu vermeiden ist.

Die Aufgaben 1 bis 3 sind für eine Einführung in die Thematik gedacht. Dabei haben aber 2 und 3 einen vom Problem unabhängigen kombinatorischen Aspekt. Sie sollten, wenn wenig Zeit zur Verfügung steht weggelassen werden, bzw. als Zusatzaufgabe für schnelle SuS verwendet werden.

Vorgehen bei den einzelnen Aufgaben:**Aufgabe 1**

Hier kann man zwei Probleme erwarten.

1. Bei dreistelligen Zahlen kann vorne keine 0 stehen.
2. Die Anzahl der Zahlen von 100 bis 999 ist nicht die Differenz, sondern 1 mehr. Das erläutert man am besten an überschaubaren Anzahlen, wie in der Musterlösung

Eine alternative Lösung geht in die Richtung von Aufgabe 2 und 3. Für die 1. Ziffer hat man 9 Möglichkeiten, für die 2. Ziffer 10 und für die 3. Ziffer ebenfalls 10, ergibt $9 \cdot 10 \cdot 10$ Möglichkeiten. Um die Multiplikation zu verdeutlichen, kann man 2 Stühle aufstellen und 2 Jungs und 3 Mädchen herausholen. Dann fragt man, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass Pärchen von Junge und Mädchen, der Junge links, das Mädchen rechts auf die Stühle sitzen. Dann argumentiert man so: Für jeden Jungen gibt 3 Mädchen, also $3 + 3 = 2 \cdot 3$ Möglichkeiten. Nun macht man dasselbe mit etwas größeren Zahlen und leitet daraus die Regel ab.

Aufgabe 2

Hat man bei Aufgabe 1 die alternative Lösung nicht besprochen, dann benötigt man die Überlegungen jetzt.

Aufgabe 3

Als neue Schwierigkeit kommt hinzu, dass Zahlen doppelt gezählt werden. Hier hilft ein stark reduziertes Beispiel, wie "alle zweistelligen Zahlen, die eine 1 und eine Ziffer kleiner als 2 enthalten." Das sind dann 10, 11, also 2 Zahlen. Die Argumentation vorne eine 1 ergibt 2 Zahlen und hinten eine 1 ergibt 1 Zahl, ergibt dann aber 3 Zahlen, weil man 11 doppelt gezählt hat.

Aufgabe 4

Zuerst sollte man herausarbeiten, dass eine Fallunterscheidung notwendig ist. Wenn die Zahl nämlich eine 0 enthält, dann müssen die anderen beiden Ziffern gleich groß sein. Das führt auf den weiteren Fall mit zwei gleichen Ziffern und keiner 0. Der dritte Fall heißt dann "alle drei Ziffern verschieden".

Man wird z.B. erstmal „wild“ suchen lassen, die Idee beschreiben lassen und dann in drei Klassen einteilen.

Nun kann man je nach zur Verfügung stehender Zeit die drei Fälle (auch binnendifferenziert) arbeitsteilig oder alternativ komplett in EA oder PA bearbeiten lassen.

Dabei kommt es auf das systematische Aufschreiben an. Dies sollte an einem Beispiel gezeigt werden, z.B. alle Buchstaben- Kombinationen (Permutationen) aus "das":
ads, asd, das, sad, sda.

Hinweis: Schreibe deinen Lösungsweg genau auf!

Aufgabe 1

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es?

Aufgabe 2

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, die genau eine 9 enthalten?

Aufgabe 3

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, die mindestens eine 9 enthalten?

Aufgabe 4

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, bei denen eine der Ziffern die Summe der beiden anderen Ziffern ist?

Beispiele: 101 oder 110, denn $1 + 0 = 1$
 224 oder ???, denn $2 + 2 = 4$
 275 oder 257 oder 527 oder ???, denn $2 + 5 = 7$

Lösungen der Aufgaben

1)

Das sind die Zahlen von 100 bis 999, also 900 Zahlen.

(Die Anzahl der Zahlen von 100 bis 101 ist $101 - 100 + 1 = 2$, von 100 bis 102 ist $102 - 100 + 1 = 3$, ... , von 100 bis 999 ist $999 - 100 + 1 = 900$.)

2)

Die 9 kann vorne stehen, das sind $9 \cdot 9 = 81$ Zahlen, da die 9 nicht weiter vorkommen darf.

Die 9 kann in der Mitte stehen, das sind $8 \cdot 9 = 72$ Zahlen, da vorne auch keine 0 stehen darf.

Die 9 kann hinten stehen, das sind dann $8 \cdot 9 = 72$ Zahlen.

Insgesamt hat man also 225 dreistellige Zahlen mit genau einer 9.

3)

Die 9 kann vorne stehen, dann können an der zweiten und dritten Stelle jeweils 0..9 stehen, das sind $10 \cdot 10 = 100$ Zahlen.

Die 9 kann an zweiter Stelle stehen, dann können vorne die Ziffer 1 bis 9 und hinten 0 bis 9 stehen, das sind $9 \cdot 10 = 90$ Zahlen.

Ebenso ergeben sich mit der 9 hinten wieder 90 Zahlen.

Nun hat man aber einige Zahlen doppelt gezählt: Alle die genau zwei 9 enthalten, wurden doppelt gezählt, 999 wurde sogar dreifach gezählt.

Es gibt 8 Zahlen mit der Endung x99, wobei x nicht 0 und nicht 9 ist, 9 Zahlen mit 9x9 (wobei x nicht 9 ist) und ebenso 9 mit 99x.

Insgesamt hat man also $100 + 90 + 90 - 8 - 9 - 9 - 2 = 252$ dreistellige Zahlen mit mindestens einer 9.

Die 2 kommt von 999.

4)

Fall 1: Die Zahl enthält eine Ziffer Null.

$(1|1|0)$, $(2|2|0)$, $(3|3|0)$, ..., $(9|9|0)$ sind 9 Zifferngrundkombinationen.

$(1|1|0)$ liefert folgende Zahlen: 110, 101

Jede Zifferngrundkombination liefert 2 gesuchte Zahlen, insgesamt entstehen aus den 9 Zifferngrundkombinationen also 18 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

Fall 2: Die Zahl enthält zwei gleiche Ziffern, die Ziffern sind von Null verschieden.

$(1|1|2)$, $(2|2|4)$, $(3|3|6)$, $(4|4|8)$ sind 4 Zifferngrundkombinationen.

$(1|1|2)$ liefert folgende Zahlen: 112, 121, 211

Jede Zifferngrundkombination liefert 3 gesuchte Zahlen, insgesamt entstehen aus den 4 Zifferngrundkombinationen also 12 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

Fall 3: Die Zahl besteht aus drei verschiedenen Ziffern, alle Ziffern sind von Null verschieden.

$(1|2|3)$, $(1|3|4)$, $(1|4|5)$, ..., $(1|8|9)$ sind 7 Zifferngrundkombinationen

$(1|2|3)$ liefert folgende Zahlen: 123, 132, 213, 231, 312, 321

$(2|3|5)$, $(2|4|6)$, $(2|5|7)$, ..., $(2|7|9)$ sind 5 Zifferngrundkombinationen

$(3|4|7)$, $(3|5|8)$, $(3|6|9)$ sind 3 Zifferngrundkombinationen

$(4|5|9)$ ist eine weitere Zifferngrundkombination

Jede Zifferngrundkombination liefert 6 gesuchte Zahlen, insgesamt entstehen aus den 16 Zifferngrundkombinationen also 96 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

Insgesamt gibt es also 126 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! 3. bis 5. können je nach Zeitbedarf weggelassen werden.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg / PA 10 Min.	L teilt Arbeitsblatt aus und gibt den Auftrag Aufg. 1 zu bearbeiten.	Schülerblatt
2. Ergebnissicherung FEU 5 Min.	Besprechung der Ergebnisse	Tafel
3. Lösen der Aufg. 2 (optional) FEU 10 Min.	L und SuS lösen im U-Gespräch die Aufg. 2. Dabei sollte das Multiplizieren herausgearbeitet werden	Tafel / Schülerblatt
4. Lösen der Aufg. 3 (optional) PA 15 Min.	L beobachtet und hilft mit Tipps. Sammlung von typischen Fehlern.	Schülerblatt
5. Sicherung und Reflexion (optional) FEU 10 Min.	Formulierung der Ergebnisse an der Tafel	Tafel / Schülerblatt
6. Problemstellung Aufg. 4 FEU 5 Min.	SuS sollen Beispiele für Aufg. 4 finden. Vorschläge. Herausarbeitung der drei Fallunterscheidungen.	Tafel
7. Erarbeitung Aufg. 4 PA 20 Min.	SuS suchen für jeden der drei Fälle die möglichen Zahlenkombinationen, evtl. noch ohne Permutation, in einer zweiten Phase wird dann permutiert. L. hilft vor allem bei der Systematik.	Schülerblatt
8. Ergebnissicherung FEU 15 Min.	Zusammentragen der Ergebnisse an der Tafel oder auf Folienschnipseln und OH-Projektor bzw. Dokumentenkamera	Tafel, Folie, Schülerblatt

Lehrerblatt

Das Gefängnis des Sultans

Jedes Jahr zu seinem Geburtstag begnadigt ein mathematikbegeisterter Sultan einige der Gefangenen in seinem Gefängnis mit 1001 Gefängniszellen.

Das Vorgehen ist stets das gleiche: Am Morgen des Geburtstags werden alle Gefangenen in ihren Zellen angekettet. Danach geht der erste Diener des Sultans durch das Gefängnis und öffnet jede Tür. Danach geht der zweite Diener los und schließt jede zweite Tür. Es folgt der dritte Diener, der bei jeder dritten Tür etwas verändert: wenn die Tür offen ist, schließt er sie, wenn sie geschlossen ist, öffnet er sie. Der vierte Diener tut das gleiche mit jeder vierten Tür. Der fünfte öffnet oder schließt jede fünfte Tür, ...

Wenn alle 1001 Diener ihre Aufgabe erledigt haben, werden diejenigen Gefangenen von ihren Ketten befreit und in die Freiheit entlassen, bei denen die Zellentür offen steht. Allen anderen müssen bleiben.



- Welche sind die „guten“ Zellennummern - also diejenigen, die ein Gefangener sich wünschen könnte, wenn er möglichst schnell begnadigt werden möchte?
- Warum sind genau diese Zellen die guten Zellen?

Sachanalyse:

Durch Ausprobieren bei den niedrigeren Zellennummern findet man schnell heraus, dass bei den Zellen 1, 4, 9, 16, 25 die Tür am Ende offen ist, bei den anderen Zellen zwischen 1 und 25 jedoch nicht. Dies legt die Vermutung nahe, dass alle Quadratzahlen gute Zellennummern ergeben, was man an weiteren Beispielen prüfen kann.

Ob eine Zelle am Ende offen steht oder nicht, hängt davon ab, ob die Zellennummer eine ungerade Anzahl an Teilern hat (gute Zelle) oder eine gerade (schlechte Zelle).

Wenn man die Teiler einer Zahl sucht, so findet man diese in der Regel paarweise. Weiß man zum Beispiel, dass 3 ein Teiler von 42 ist ($3 \cdot 14 = 42$), so ist 14 auch ein Teiler von 42. Man findet also meistens Teilerpaare. Es gibt lediglich eine Ausnahme: Bei Quadratzahlen gibt es einen Teiler, der keinen Partner hat, nämlich die Quadratwurzel der Quadratzahl. Somit haben Quadratzahlen eine ungerade Teileranzahl.

Ziele und Themen:

- Problemlösestrategien „zunächst einige einfache Beispiele untersuchen“ und „aus Beispielen eine allgemeine Vermutung ableiten“ anwenden
- Beschäftigung mit Teilern einer Zahl, Teilerpaaren und Quadratzahlen
- Rechenübungen zur Division und Multiplikation
- Freude an mathematischen Rätseln und Lösungsstrategien entwickeln

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe, alle guten Zellennummern zu finden, erscheint angesichts der vielen Zellen zunächst schwierig. Da sich aber schnell erste Beispiele für „gute Zellen“ finden lassen, erlaubt die Aufgabe frühe Erfolgserlebnisse. Mit Hilfe von Problemlösestrategien, die die Schülerinnen und Schüler bereits in vorherigen Stunden kennengelernt haben (vgl. zum Beispiel „Endziffern bei Potenzen“ oder „Eulersche Polyederformel“), können im Verlauf der Stunde wichtige Fortschritte erzielt werden. Dazu sollten die Strategien gemeinsam wieder in Erinnerung gerufen werden.

Zunächst hilft die Strategie „systematisches Ausprobieren“, mehrere Beispiele für schlechte und gute Zellen zu finden. Da die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche viele und auch verschiedene Zellennummern finden, ist die Suche selbstdifferenzierend und ergibt durch Zusammenfassen der gemeinsamen Ergebnisse der Lerngruppe schnell eine größere Zahl an Beispielen für gute Zellennummern.

Das Überprüfen, ob die vorgeschlagenen Zellen tatsächlich gute Zellen sind, trainiert den Umgang mit Teilbarkeitsregeln und die Rechenfähigkeiten, da zum Finden aller Teiler einer Zahl dividiert oder „probehalber“ multipliziert werden muss.

Beispiele untersuchen – mögliches systematisches Vorgehen

Zelle	①	2	3	④	5	6	7	8	⑨	10	11	12	13	14	⑯	17	...		
Welche Diener kommen vorbei?	1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 6 12	1 13	1 2 7 14	1 2 4 8 16	1 17	...		

Diese Darstellung ermöglicht systematisch das Identifizieren guter Zellen (O). Gleichzeitig erhält man einen Überblick über die Teiler der einzelnen Zahlen.

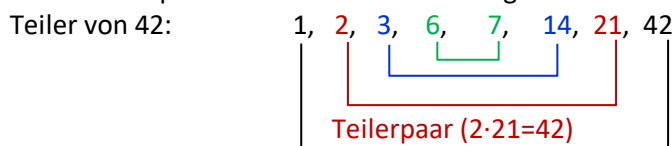
Erkenntnisse aus den Beispielen

Um zu einer allgemeinen Regel zu gelangen, welche Zellen gut sind, müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst entdecken, dass bei einer geraden Anzahl von Dienern, die an der Zelle vorbei kommen, die Tür an Ende zu ist, bei einer ungerade die Tür am Ende auf. Anschließend beantwortet die Tabelle übersichtlich die Frage nach guten Zellen, indem man die Anzahl der Diener an den einzelnen Zellen zählt. Es sollte auch geklärt werden, dass die Suche nach den Dienern, die an der Zelle vorbei kommen, das gleich ist wie die Suche nach den Teilern der Zellennummer. Falls nötig kann der Lehrer dazu nachfragen, wie man z.B. bei Zelle 63 feststellt, ob Diener 3 (Diener 4, ...) vorbeikommt.

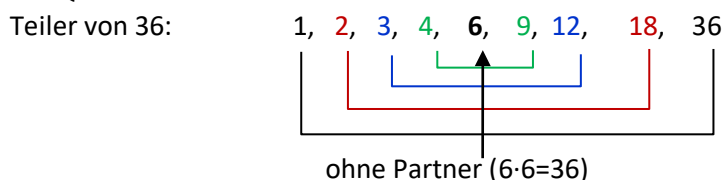
Alle Entdeckungen der Schüler sollten angemessen gelobt werden.

Entwickeln einer Begründung der Quadratzahlen-Vermutung

Auch hier ist eine systematische und übersichtliche Darstellung hilfreich. Im fragend-entwickelnden-Verfahren kann der Lehrer die Tatsache entwickeln, dass die Teiler meisten in Paaren vorliegen. Dies kann an Beispielen und unter Verwendung von Farben deutlich gemacht werden:



Bei Quadratzahlen wird das Auftreten eines Teilers ohne Partner deutlich hervorgehoben:



Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit UG ... Unterrichtsgespräch

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg ca. 10 min UG	L stellt das Rätsel vor SuS beurteilen und begründen, ob die ersten drei Zellen gute oder schlechte Zellen sind L motiviert, dass es gut wäre alle guten Zellen zu kennen, falls die ersten Zellen schon belegt sind. Da man alle guten Zellen nicht sofort benennen kann, fragt L nach bekannten Problemlösestrategien. SuS und L wiederholen Strategien, u.a. auch „konkrete einfache Beispiele anschauen“ L stellt Auftrag, unter den ersten (20 bis 30) Zellen möglichst viele gute zu finden	OHP/ Dokukamera: Bild Gefängniszellen
2. Erarbeitung I ca. 10 min EA, PA	SuS suchen zunächst mit beliebigem individuellem Vorgehen gute Zellen. L lobt, beobachtet, ermuntert weitere zu finden und gibt ggf. vorsichtig dosierte Tipps	Heft
3. Sammeln, Vermuten, Systematisieren ca. 15 min UG	SuS sammeln Beispiele für gute Zellen, prüfen nach, begründen. SuS äußern (evtl. auf L-Nachfrage) eine allgemeine Vermutung, welche Zahlen zu gut Zellen gehören. L fragt nach einer Regel, wie man bei einer Zelle feststellt, ob es eine gute ist. SuS formulieren Regeln u. erläutern an Beispielen L fragt nach einem systematischen Vorgehen, um Zellen zu prüfen. SuS machen Vorschläge. SuS und L wählen ein Vorgehen aus und wenden es auf die ersten 20 Zellen an.	Tafel (Notizen) Tafel, Heft
4. Erarbeitung II ca. 10 min EA, PA	SuS prüfen systematisch ca. weitere 20 Zellen und einige weitere Quadratzellennummern. SuS vergleichen die Teiler bei guten und schlechten Zellennummern, und begründe den Unterschied. L lobt, beobachtet und gibt ggf. vorsichtig Tipps	Heft

5. Begründen ca. 15 min UG kurze EA UG	SuS berichten von ihren Ergebnissen und Ideen L führt den Begriff „Teilerpaare“ ein und veranschaulicht ihn an Beispielen. SuS untersuchen Nichtquadratzahlen und Quadratzahlen auf Teilerpaare und ziehen Schlüsse für das Rätsel. SuS formulieren Begründung, warum genau die Quadratzahlen gute Zellennummern ergeben. L und SuS halten Begründung fest	Tafel Heft, Tafel Tafel, Heft
6. Ergänzung I ca. 5 ... 10 min EA, PA	„Schätz“frage: Welches ist die größte gute Zellennummer unter den 1001 Zellen? (Sofort antworten, wer am nächsten daran liegt gewinnt.) SuS suchen (ohne Taschenrechner) die größte gute Zellennummer. SuS suchen und notieren alle guten Zellennummern.	Heft

Sachanalyse

Satz: Es gelten die folgenden Teilbarkeitsregeln:

Eine natürliche Zahl z ist genau dann **durch n teilbar** (d.h. die Division $z : n$ ergibt keinen Rest), wenn

- $n = 2$: die letzte Ziffer von z auf 0; 2; 4; 6 oder 8 lautet
- $n = 3$: die Quersumme von z durch 3 teilbar ist
- $n = 4$: die aus den letzten beiden Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar ist
- $n = 5$: die letzte Ziffer von z auf 0 oder 5 lautet
- $n = 6$: z durch 2 und durch 3 teilbar ist
- $n = 8$: die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl durch 8 teilbar ist
- $n = 9$: die Quersumme von z durch 9 teilbar ist
- $n = 10$: die letzte Ziffer von z auf 0 lautet
- $n = 11$: die alternierende Quersumme von z durch 11 teilbar ist

Beweis:

Für $n = 8$ (entsprechend für $n = 4$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

Da $10^3 = 1000$ durch 8 teilbar ist ($1000 : 8 = 125$), ist 10^n durch 8 teilbar für $n \geq 3$.

z ist also genau dann durch 8 teilbar, wenn $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ – das ist **die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl** – durch 8 teilbar ist. ■

Für $n = 9$ (entsprechend für $n = 3$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

Es gilt: $z = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 - 1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ (♦).

Die ersten n Summanden in der Darstellung (♦) sind Vielfache von 9 und somit durch 9 teilbar.

z ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn die **Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $n+1$ Summanden von (♦), durch 9 teilbar ist. ■

Für $n = 11$:

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_{2n} \cdot 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_{2n}; a_{2n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

Es gilt: $z = a_{2n} \cdot (10^{2n} - 1) + a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 + 1) + a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0$ (♦).

Es gilt für $n \geq 1$: $10^{2n} - 1 =$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) \text{ und } 10^{2n-1} + 1 =$$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0).$$

Damit sind die ersten $2n$ Summanden in der Darstellung (♦) Vielfache von 11 und somit durch 11 teilbar.

z ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn die **alternierende Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $2n+1$ Summanden von (♦) durch 11 teilbar ist. ■

Die anderen Fälle sind offensichtlich.

Das Prinzip ist:

betrachte die Reste bei der Division der Stufenzahlen durch n . ■

Lehrerblatt

Didaktische Reduktion:

Bei der Frage nach der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl z durch eine natürliche Zahl n kann man z.B. das **Gruppen-Aufteilungs-Modell** heranziehen. Eine Anzahl von z Personen soll in Gruppen zu jeweils n Personen aufgeteilt werden. Die Frage, ob z durch n teilbar ist, geht damit über in die Frage, ob alle z Personen in einer solchen Gruppe der Größe n unterkommen oder ob Personen übrig bleiben. Die Frage, wie viele Gruppen gebildet werden können, ist dabei nicht von Belang.

Exemplarisch für $n = 4$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 4 \cdot 250$) Personen kommen alle in 4er-Gruppen unter.

Von 100 ($= 4 \cdot 25$) Personen kommen alle in 4er-Gruppen unter.

Es bleibt also nur die Frage, ob von 34 Personen alle in 4er-Gruppen unterkommen.

34 ist nicht durch 4 teilbar, also 1234 auch nicht.

Hilfsregel (diese wird auf dem Arbeitsblatt verwendet):

Eine zweistellige Zahl ist nur dann durch 4 teilbar wenn

- die Zehnerziffer gerade ist und die Einerziffer 0; 4 oder 8 heißt
- die Zehnerziffer ungerade ist und die Einerziffer 2 oder 6 heißt.

Exemplarisch für $n = 11$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 11 \cdot 91 - 1$) Personen kommen alle in 11-er Gruppen (Fußball-Mannschaften!) unter. Eine dieser 91 Gruppen hat zunächst aber nur 10 Personen. Es fehlt also noch 1 Person.

Von 100 ($= 11 \cdot 9 + 1$) Personen kommen 99 in 11-er Gruppen unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Von 10 Personen kommen alle in einer 11-er Gruppe unter. Dabei fehlt aber noch 1 Person.

1 Person kommt nicht in einer 11-er Gruppe unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Bei $1234 = 4 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 1000$ Personen bleiben also $4 - 3 + 2 - 1 = 2$ Personen übrig.

Diese so genannte **alternierende Quersumme** entscheidet allein über die Teilbarkeit durch 11.

Ist diese alternierende Quersumme gleich 0, so heben sich die Anzahlen derer die übrig sind und derer die noch fehlen gerade auf.

Das Zahlenbeispiel 3619 mit der alternierenden Quersumme 11 zeigt, dass man mit denen, die übrig sind, die noch nicht vollständigen Gruppen auffüllen und sogar noch eine neue Gruppe bilden kann.

Das Zahlenbeispiel 7491 mit der alternierenden Quersumme -11 zeigt, dass man ggf. eine bestehende Gruppe auflösen muss.

Also: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, sonst nicht.

Bemerkung 1: Über den Wert der Achter-Regel kann man geteilter Meinung sein.

Bemerkung 2: SuS fragen Sie eventuell: „Gibt es eine 7er-Regel?“

Entsprechend der Reste bei den Divisionen $1:7$ (Rest 1), $10:7$ (Rest 3), $100:7$ (Rest 2), $1000:7$ (Rest 6), $10000:7$ (Rest 4), $100000:7$ (Rest 5), $1000000:7$ (Rest 1), usw. heißt die 7er-Regel so:

Eine Zahl z ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme nämlich

1 mal 1-er-Ziffer + 3 mal 10-er-Ziffer + 2 mal 100-er-Ziffer + 6 mal 1000-er-Ziffer +

4 mal 10000-er-Ziffer + 5 mal 100000-er-Ziffer + 1 mal 1000000-er-Ziffer usw. durch 7 teilbar ist.

Alternative: **1 mal 1-er-Ziffer + 3 mal 10-er-Ziffer + 2 mal 100-er-Ziffer – 1 mal 1000-er-Ziffer –**
3 mal 10000-er-Ziffer – 2 mal 100000-er-Ziffer + 1 mal 1000000-er-Ziffer usw.

Beispiel: 312.368 ist durch 7 teilbar, denn $1 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 21$, 21 ist durch 7 teilbar.

Über den Wert der 7er-Regel kann man auch geteilter Meinung sein.

Ziele:

- Teilbarkeitsregeln wiederholen und vertiefen; Kopfrechnen
- Sachverhalte auf den Kern reduzieren:
 Untersuchung der Stufenzahlen auf den Rest bei der Division durch n

1. Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn

oder, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn, sonst nicht.

2. Herleitung der 9er-Regel am Beispiel 234: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 9er-Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter/Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
...				
Hunderter				
Zehner				
Einer				
			Summe:	

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

.....

3. Herleitung der 11er-Regel für dreistellige Zahlen. Beispiel: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 11er-Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter/Zehner usw. bleiben übrig oder fehlen:	insgesamt übrig (+) / fehlen (-):
Hunderter		9	 übrig	
Zehner		1	 fehlt	
Einer		0	 übrig	
			Summe:	

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet:

.....

1. Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn **die Einerziffer 0; 2; 4; 6 oder 8 heißt**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn **ihre Quersumme durch 3 teilbar ist**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn **die Zehnerziffer gerade ist und die Einerziffer 0; 4 oder 8 heißt**
oder **die Zehnerziffer ungerade ist und die Einerziffer 2 oder 6 heißt**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn **die Einerziffer 0; oder 5 heißt**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn **ihre Quersumme durch 9 teilbar ist**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn **die Einerziffer 0 heißt**, sonst nicht.

2. Herleitung der 9er-Regel am Beispiel 234: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 9er- Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter/ Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
...				
Hunderter	$100 = 11 \cdot 9 + 1$	11	1	2
Zehner	$10 = 1 \cdot 9 + 1$	1	1	3
Einer	1	0	1	4
Summe:				$2 + 3 + 4 = 9 \rightarrow$ noch eine 9er-Gruppe $\rightarrow$ keiner übrig

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

Einerziffer plus Zehnerziffer plus Hunderterziffer plus Tausenderziffer usw.

3. Herleitung der 11er-Regel für dreistellige Zahlen. Beispiel: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 11er-Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter / Zehner usw. bleiben übrig oder fehlen:	insgesamt übrig (+)/ fehlen (-):
Hunderter	$100 = 9 \cdot 11 + 1$	9	1 übrig	2
Zehner	$10 = 1 \cdot 11 - 1$	1	1 fehlt	-3
Einer	1	0	1 übrig	4
Summe:				$2 - 3 + 4 = 3$ sind übrig

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet:

Hunderterziffer plus Einerziffer minus Zehnerziffer

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

(In Texten der leichten Lesbarkeit halber: „Schüler“ bzw. „Lehrer“)

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Phase 4. wird man je nach Zeit und Interesse der SuS stattfinden oder weggelassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU z.T. EA/PA 20 Min.	SuS wiederholen die bis dahin bekannten Teilbarkeitsregeln ($n = 2; 3; 4; 5; 9; 10$), zunächst EA/PA Teil 1. des Schülerblattes wird gemeinsam ausgefüllt, die angestrebte Hilfsregel zur Teilbarkeit durch 4 wird von den SuS an der 4er-Reihe 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76; 80; 84; 88; 92; 96 ... in EA/PA erkannt – L gibt ggf. den Tipp: „Unterscheide die beiden Fälle Zehnerziffer gerade bzw. Zehnerziffer ungerade.“ SuS üben die Teilbarkeitsregeln – L stellt dazu Aufgaben vom Typ - durch welche n (s.o.) ist 3345 teilbar? - wie muss die letzte Ziffer (x) von 1234 x lauten, damit eine Teilbarkeit durch n vorliegt? SuS erfinden selbst solche Aufgaben	Schülerblatt Teil 1. ggf. Tafel o.ä.
2. Erarbeitung I FEU 10 Min.	L leitet mit den SuS die 9er-Regel anhand des Gruppenaufteilungs-Modells her	Schülerblatt Teil 2. ggf. Tafel o.ä.
3. Erarbeitung II EA/PA dann FEU 10 Min.	SuS leiten die 11er-Regel für dreistellige Zahlen anhand des Gruppen-Aufteilungs-Modells her L unterstützt, insbesondere bei der Installation und numerischen Interpretation von „1 fehlt“ Die 11er-Regel wird „gefeiert“: - an Beispielen angewandt und bestätigt (Überprüfung durch Division) - SuS „basteln“ mithilfe der 11er-Regel dreistellige 11er-Zahlen - SuS erkennen die beiden Fälle - Hunderterziffer plus Einerziffer minus Zehnerziffer = 0: → es gleicht sich gerade aus - Hunderterziffer plus Einerziffer minus Zehnerziffer = 11: → noch eine weitere 11er-Gruppe kann gebildet werden	Schülerblatt Teil 3. ggf. Tafel o.ä.
4. Erarbeitung III FEU 15 Min.	L informiert ggf. SuS darüber, wie die allgemeine 11er-Regel lautet (alternierende Quersumme) und thematisiert am Zahlenbeispiel 7491, dass ggf. eine 11er-Gruppe aufgelöst werden muss L informiert ggf. SuS über die 6er-, die 7er- (ggf. nur für dreistellige Zahlen) und die 8er-Regel	

Sachanalyse

Es gelten die folgenden Teilbarkeitsregeln:

Satz 1: Eine natürliche Zahl z ist genau dann **durch n teilbar**

(d.h. die Division $z : n$ ergibt keinen Rest), wenn

- $n = 2$: die letzte Ziffer von z auf 0; 2; 4; 6 oder 8 lautet
- $n = 3$: die Quersumme von z durch 3 teilbar ist
- $n = 4$: die aus den letzten beiden Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar ist
- $n = 5$: die letzte Ziffer von z auf 0 oder 5 lautet
- $n = 6$: z durch 2 und durch 3 teilbar ist
- $n = 8$: die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl durch 8 teilbar ist
- $n = 9$: die Quersumme von z durch 9 teilbar ist
- $n = 10$: die letzte Ziffer von z auf 0 lautet
- $n = 11$: die alternierende Quersumme von z durch 11 teilbar ist

Beweis:

Für $n = 8$ (entsprechend für $n = 4$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

Da $10^3 = 1000$ durch 8 teilbar ist ($1000 : 8 = 125$), ist 10^n durch 8 teilbar für $n \geq 3$.

z ist also genau dann durch 8 teilbar, wenn $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ – das ist **die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl** – durch 8 teilbar ist. ■

Für $n = 9$ (entsprechend für $n = 3$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

$$\text{Es gilt: } z = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 - 1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (\diamond).$$

Die ersten n Summanden in der Darstellung ($\diamond$) sind Vielfache von 9 und somit durch 9 teilbar.

z ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn die **Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $n+1$ Summanden von ($\diamond$), durch 9 teilbar ist. ■

Für $n = 11$:

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_{2n} \cdot 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_{2n}; a_{2n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

$$\text{Es gilt: } z = a_{2n} \cdot (10^{2n} - 1) + a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 + 1) + a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0 \quad (\diamond).$$

$$\text{Es gilt für } n \geq 1: \quad 10^{2n} - 1 =$$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) \text{ und}$$

$$10^{2n-1} + 1 =$$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0).$$

Damit sind die ersten $2n$ Summanden in der Darstellung ($\diamond$) Vielfache von 11 und somit durch 11 teilbar.

z ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn die **alternierende Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $2n+1$ Summanden von ($\diamond$) durch 11 teilbar ist. ■

Die anderen Fälle sind offensichtlich. ■

Satz 2: Genau dann wenn die natürliche Zahl k ungerade ist, ist die Summe von k aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch k teilbar.

$$\text{Beweis: } z + (z+1) + \dots + (z+k-1) = k \cdot z + (1+2+3+\dots+(k-1)) = k \cdot z + 0,5 \cdot (k-1) \cdot k.$$

Der letzte Ausdruck ist genau dann durch k teilbar, wenn $0,5 \cdot (k-1)$ eine natürliche Zahl ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn $k-1$ eine gerade Zahl, k also eine ungerade Zahl ist. ■

Lehrerblatt

Didaktische Reduktion:

Bei der Frage nach der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl z durch eine natürliche Zahl n kann man z.B. das **Gruppen-Aufteilungs-Modell** heranziehen. Eine Anzahl von z Personen soll in Gruppen zu jeweils n Personen aufgeteilt werden. Die Frage, ob z durch n teilbar ist, geht damit über in die Frage, ob alle z Personen in einer solchen Gruppe der Größe n unterkommen oder ob Personen übrig bleiben. Die Frage, wie viele Gruppen gebildet werden können, ist hier nicht von Belang.

Exemplarisch für $n = 4$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 4 \cdot 250$) Personen kommen alle in 4-er Gruppen unter.

Von 100 ($= 4 \cdot 25$) Personen kommen alle in 4-er Gruppen unter.

Es bleibt also nur die Frage ob von 34 Personen alle in 4-er Gruppen unter kommen.

34 ist nicht durch 4 teilbar, also 1234 auch nicht.

Exemplarisch für $n = 11$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 11 \cdot 91 - 1$) Personen kommen alle in 11-er Gruppen (Fußball-Mannschaften!) unter.

Eine dieser 91 Gruppen hat zunächst aber nur 10 Personen. Es fehlt also noch 1 Person.

Von 100 ($= 11 \cdot 9 + 1$) Personen kommen 99 in 11-er Gruppen unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Von 10 Personen kommen alle in einer 11-er Gruppe unter. Dabei fehlt aber noch 1 Person.

1 Person kommt nicht in einer 11-er Gruppe unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Bei $1234 = 4 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 1000$ Personen bleiben also $4 - 3 + 2 - 1 = 2$ Personen übrig.

Diese so genannte **alternierende Quersumme** entscheidet allein über die Teilbarkeit durch 11.

Ist diese alternierende Quersumme gleich 0, so heben sich die Anzahlen derer die übrig sind und derer die noch fehlen gerade auf.

Das Zahlenbeispiel 3619 mit der alternierenden Quersumme 11 zeigt, dass man mit denen, die übrig sind, die noch nicht vollständigen Gruppen auffüllen und sogar noch eine neue Gruppe bilden kann.

Das Zahlenbeispiel 7491 mit der alternierenden Quersumme -11 zeigt, dass man ggf. eine bestehende Gruppe auflösen muss.

Also: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, sonst nicht.

Bemerkung 1: Über den Wert der Achter-Regel kann man geteilter Meinung sein.

Bemerkung 2: SuS fragen „Gibt es eine Siebener-Regel?“ Entsprechend der Reste bei den Divisionen $10:7$; $100:7$; $1000:7$ usw. heißt die Sieber-Regel so:

Eine Zahl z ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme nämlich

1-er-Ziffer mal **1** + 10-er-Ziffer mal **3** + 100-er-Ziffer mal **2** + 1000-er-Ziffer mal **6** + 10000-er-Ziffer mal **4** + 100000-er-Ziffer mal **5** + 1000000-er-Ziffer mal **1** usw. durch 7 teilbar ist.

Alternative: 1-er-Ziffer mal **1** + 10-er-Ziffer mal **3** + 100-er-Ziffer mal **2** – 1000-er-Ziffer mal **1** – 10000-er-Ziffer mal **3** – 100000-er-Ziffer mal **2** + 1000000-er-Ziffer mal **1** usw.

Über den Wert der Siebener-Regel kann man auch geteilter Meinung sein.

Zu den Summen aufeinander folgenden Zahlen:

- Hat man eine ungerade Anzahl von Summanden kann man sehr schön den bereits gelernten Summentrick (vgl. die gleichnamige Sitzung) anwenden, ein Beispiel:

$$123+124+125+126+127+128+129 = (123+129) + (124+128) + (125+127) + 126 = 7 \cdot 126.$$

Diese Zahl ist durch 7 teilbar, dazu muss man das Produkt nicht ausrechnen.

Ziele:

- Kopfrechnen üben
- Sachverhalte auf den Kern reduzieren:
Untersuchung der Stufenzahlen auf den Rest bei der Division durch n

Tafelanschrieb
Teilbarkeit

1.) Teilbarkeitsregeln (2; 3; 4; 5; 9; 10) auswendig <Übungen>

2.) Ist 1234 durch 9 teilbar?

 $1234 = 1 \text{ Tausender} + 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 9er- Gruppen (unwichtig):	für jeden Einer / Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
Einer	1	0	1	4
Zehner	$10 = 1 \cdot 9 + 1$	1	1	3
Hunderter	$100 = 11 \cdot 9 + 1$	11	1	2
Tausender	$1000 = 111 \cdot 9 + 1$	111	1	1
...				

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

*Einerziffer **plus** Zehnerziffer **plus** Hunderterziffer **plus** Tausenderziffer usw.*

3.) Ist 1234 durch 11 teilbar?

 $1234 = 1 \text{ Tausender} + 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 11er- Gruppen (unwichtig):	für jeden Einer / Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
Einer	1	0	1	4
Zehner	$10 = 1 \cdot 11 - 1$	1	-1	-3
Hunderter	$100 = 9 \cdot 11 + 1$	9	1	2
Tausender	$1000 = 91 \cdot 11 - 1$	91	-1	-1
...				

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet die so genannte alternierende Quersumme:

*Einerziffer **minus** Zehnerziffer **plus** Hunderterziffer **minus** Tausenderziffer usw.*

4.) Die Summe von 2 aufeinander folgenden Zahlen ist nie durch 2 teilbar.

Begründung: gerade Zahl + ungerade Zahl = ungerade Zahl

Die Summe von 3 aufeinander folgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

 Begründung: $123 + 124 + 125 = 3 \cdot 124$, entsprechend für alle anderen Zahlen, die Summe ist immer dreimal die „mittlere“ Zahl (Summentrick)

Die Summe von 4 aufeinander folgenden Zahlen ist nie durch 4 teilbar.

 Begründung: $123 + 124 + 125 + 126 = 2 \cdot 249$, entsprechend für alle anderen Zahlen, das Doppelte einer ungeraden Zahl kann nicht durch 4 teilbar sein.

Usw.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

(In Texten der leichten Lesbarkeit halber: „Schüler“ bzw. „Lehrer“)

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird der Lehrer die 4. Phase bzw. 5. Phase weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 20 Min.	SuS wiederholen und üben die bis dahin bekannten Teilbarkeitsregeln ($n = 2; 3; 4; 5; 9; 10$) L stellt Aufgaben vom Typ - durch welche n (s.o.) ist 3345 teilbar? - wie muss die letzte Ziffer (=?) von 1234? lauten damit eine Teilbarkeit durch n vorliegt? SuS erfinden Aufgaben	Tafel
2. Erarbeitung I FEU 20 Min.	L leitet die Neuner-Regel anhand des Gruppenaufteilungs-Modells her (Tabelle – vgl. Tafelanschrieb)	Tafel
3. Erarbeitung II und Sicherung EA/PA dann FEU 15 Min.	SuS leiten die Elfer-Regel anhand des Gruppen-Aufteilungs-Modells her (Tabelle – vgl. Tafelanschrieb) L unterstützt, insbesondere bei der Installation und Interpretation von „-1 bleibt übrig“ L informiert SuS darüber, dass es über die Tausender hinaus genau so „mit + und –“ weitergeht	Heft / Tafel
4. Erarbeitung III FEU 15 Min.	Was fehlt noch? L informiert über die Sechser-, Siebener- und Achterregel	
5. Erarbeitung IV und Sicherung EA/PA 20 Min.	L: Die Summe der 9 aufeinander folgenden Summanden $35+36+37+38+39+40+41+42+43=351$ ist durch 9 teilbar. Ist das Zufall? SuS forschen zur Frage <i>Ist die Summe von k ($= 2; 3; 4; 5; \dots$) aufeinander folgenden Zahlen immer durch k teilbar?</i> Typische Phasen: - generiere Beispiele - versuche eine allgemeine Begründung (hier u.a.: beispielgebunden, Summentrick anwenden) L und SuS: Ergebnisse werden gebündelt und festgehalten (je nach Zeit und Lenkung ist eine unterschiedliche Begründungstiefe möglich)	Heft / Tafel

Didaktischer Kommentar

Das sichere Zeichnen (und Messen) von Winkeln bedarf ausreichender Übung und fällt nicht allen Schülerinnen und Schülern gleichermaßen leicht. Unter Anderem muss man dazu das genaue Anlegen, das genaue Markieren/ Zeichnen und den sicheren Umgang mit den beiden Skalen des Geodreiecks beherrschen. Es erweist sich als sinnvoll, das Vorgehen beim Zeichnen von Winkeln kurz zu wiederholen. Da es unterschiedliche Vorgehensweisen gibt, bietet es sich an, Schülerinnen oder Schüler erklären zu lassen, wie sie das Zeichnen gelernt haben.

Diese Stunde übt das sichere und zügige Zeichnen von Winkeln. Besonders die langsamen „Winkelzeichner“ profitieren von der Wiederholung und der zusätzlichen Übung. Denn sie können später im Mathematikunterricht ihre Aufmerksamkeit auf die neuen Aspekte und Herausforderungen der Geometrie richten können, wenn das Zeichnen (und Messen) von Winkeln schnell von der Hand geht. Darüber hinaus zeichnet sich diese Stunde durch spielerische Elemente und viel konkretes Tun mit den Händen aus. Auch die Freude an ästhetischen und schönen Zeichnungen kann und soll gefördert werden.

Es ist möglich die Beschäftigung mit Winkeln nur auf einen Teil der Stunde zu beschränken und Zeit zu gewinnen, um eventuelle noch offene Fragen aus den Vorstunden zu besprechen oder vertiefen.

Variante zum Schiffsroutenspiel

Das Schiffsroutenspiel kann in einem zweiten Durchgang auch auf stumpfe und überstumpfe Winkel (Vorgehen bei überstumpfen Winkeln besprechen) ausgeweitet werden. Regelverschärfung: Vor dem Zeichnen muss gesagt werden in welche Richtung (nach links/ mathematisch positiv oder nach rechts/ mathematisch negativ) der Winkel abgetragen wird. Eine spätere Änderung ist nicht mehr erlaubt.

Augenzahl Würfel „Winkel“	Winkel	Augenzahl Würfel „Länge“	Länge
1	225°	1	1 cm
2	120°	2	2 cm
3	165°	3	3 cm
4	25°	4	4 cm
5	240°	5	5 cm
6	70°	6	6 cm

Ergänzung (für eine Stunde ohne Programmieren)

Eine geeignete Ergänzung zum Zeichnen von Winkeln ist das Schätzen und Messen von Winkelweiten. Dazu kann man die Schülerpaare ihre Spielpläne austauschen lassen. Nun soll ohne Messen herausgefunden werden, was ein Spieler während des Spiels gewürfelt hatte.

Damit die SuS ihre detektivischen Fähigkeiten prüfen können, kann man beim Spielen die Spieler ihre Würfelergebnisse (jeweils als Paar) auf einem separaten Blatt notieren lassen. Am Ende werden dem ursprünglichen Spieler die ermittelten Ergebnisse zur Prüfung vorgetragen.

Ein weiteres Arbeitsblatt mit einer vorgegebenen Schiffsroute, bei der beliebige Winkelweiten vorkommen, kann anschließend das genaue Messen von Winkeln üben.

Stundenvariante mit Programmieren (Scratch oder Pocket Code)

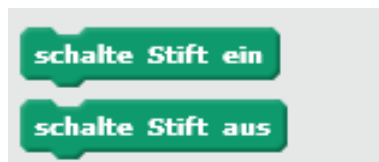
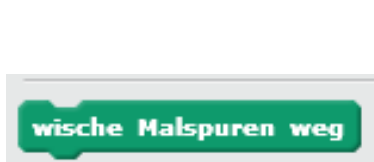
Falls die ersten Stunden zum Programmieren bereits stattgefunden haben, besteht hier eine gute Möglichkeit, das Programmieren mit Scratch (oder Pocket Code) aufzugreifen und Programme schreiben zu lassen, die regelmäßige n-Ecke (zunächst $n = 4, 5, 6$) zeichnen. Eine anspruchsvollere Ergänzung ist das Zeichnen von 4-, 5- oder 6-zackigen Sternen.

Die Variante mit dem Programmieren bietet sich aufgrund des Zeitbedarfs vor allem für 90-min-Stunden und 60-min-Stunden an. Bei letzteren empfiehlt es sich Teile des Arbeitsblatts kürzen. Die handwerklichen Übungen zum Zeichnen von Winkeln sollten jedoch aus den anfangs genannten Gründen nicht komplett ausfallen.

Hilfreiche Programmblöcke für das Zeichnen von Figuren mit Scratch:



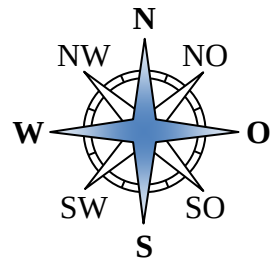
Falls ein anderer Startpunkt für die Zeichnung gewünscht ist:



Winkel in der Schifffahrt

1. Schiffslogbücher

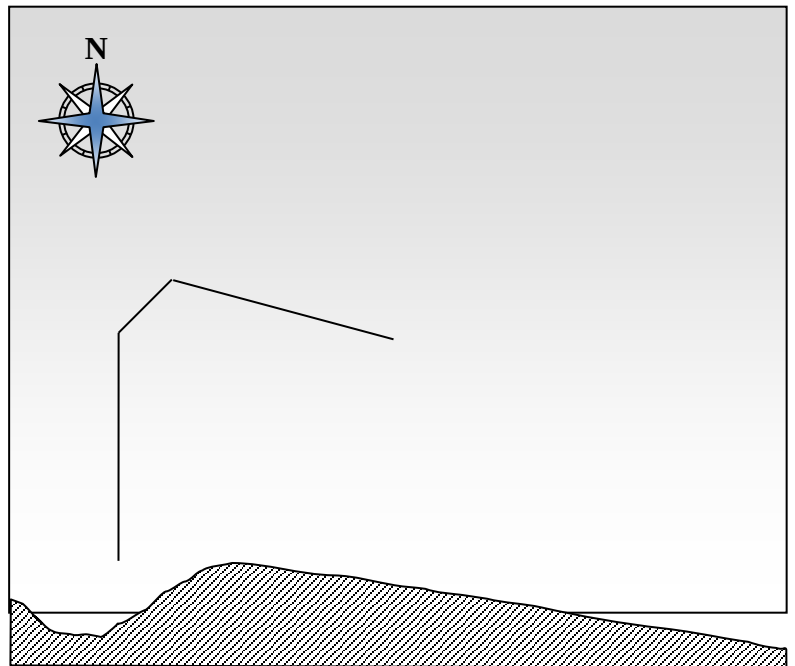
- a) Welches Logbuch gehört zu der Route in der Karte rechts?
In welchem Maßstab ist die Karte gezeichnet?
- b) Der nächste Eintrag im Logbuch lautet: „Kursänderung um 30° nach links, Fahrtstrecke 20 Meilen.“ Zeichne ein, wie die Fahrt weitergeht.

**Schiffs-Logbuch „MS Anna“**

Kurs:	gefahrte Strecke:
N	30 Meilen
NO	10 Meilen
Kursänderung um	
60° nach rechts	30 Meilen

Schiffs-Logbuch „MS Maria“

Kurs:	gefahrte Strecke:
N	30 Meilen
SO	10 Meilen
Kursänderung um	
60° nach links	30 Meilen



2. Ruderregatta Die Route einer Ruderregatta ist mit Bojen markiert:

Vom Start (Punkt S) geht es 4 Meilen nach Norden. Dort ist die erste Wendeboje A und die Richtung ändert sich um 40° nach links. Nach weiteren 4 Meilen folgt die zweite Boje B. Dort wird die Richtung um 140° nach links geändert. Die folgende Strecke ist ebenfalls 4 Meilen lang und endet bei Boje C. Von dort geht es zurück zum Start.

- a) Zeichne die Route der Regatta in dein Heft. Notiere auch den Maßstab deiner Zeichnung (... cm entsprechen ... Meilen).
- b) Wie groß ist die Richtungsänderung bei Boje C? Wie lang ist die letzte Strecke zurück zum Start? Wie heißt die Figur, die hier entstanden ist?
- c) Kannst du ohne zu messen sagen, wie groß die Winkel $\angle SAB$ und $\angle ABC$ sind?
Gib ohne zu messen an, wie groß die Winkel $\angle ABC$ und $\angle BCS$ zusammen sind.

3. Schiffsrouten-Spiel

Material: Spielplan, 2 Würfel, Geodreieck

Spielregeln: Zu Spielbeginn sucht sich jeder eine Startposition auf der Startlinie aus. Ziel ist es, um die Wendeboje herum zu fahren und wieder zurück zur Startlinie. Es wird abwechselnd mit zwei Würfeln geworfen. Einer der Würfel gibt den Winkel zur bisherigen Fahrtrichtung an. Ihr könnt selbst entscheiden, ob die Fahrtrichtung nach links oder nach rechts geändert werden soll. Der andere Würfel bestimmt, wie weit euer Schiff in die neue Richtung fährt. Ihr dürft euch nach dem Würfeln aussuchen, welcher Würfel den Winkel angibt und welcher die Länge der Fahrstrecke. Was die Würfelzahlen bedeuten seht ihr in der Tabelle. Gewonnen hat, wer zuerst die Start- und Ziellinie wieder überquert.

Augenzahl Würfel „Winkel“	Winkel	Augenzahl Würfel „Länge“	Länge
1	45°	1	1 cm
2	90°	2	2 cm
3	65°	3	3 cm
4	25°	4	4 cm
5	50°	5	5 cm
6	70°	6	6 cm



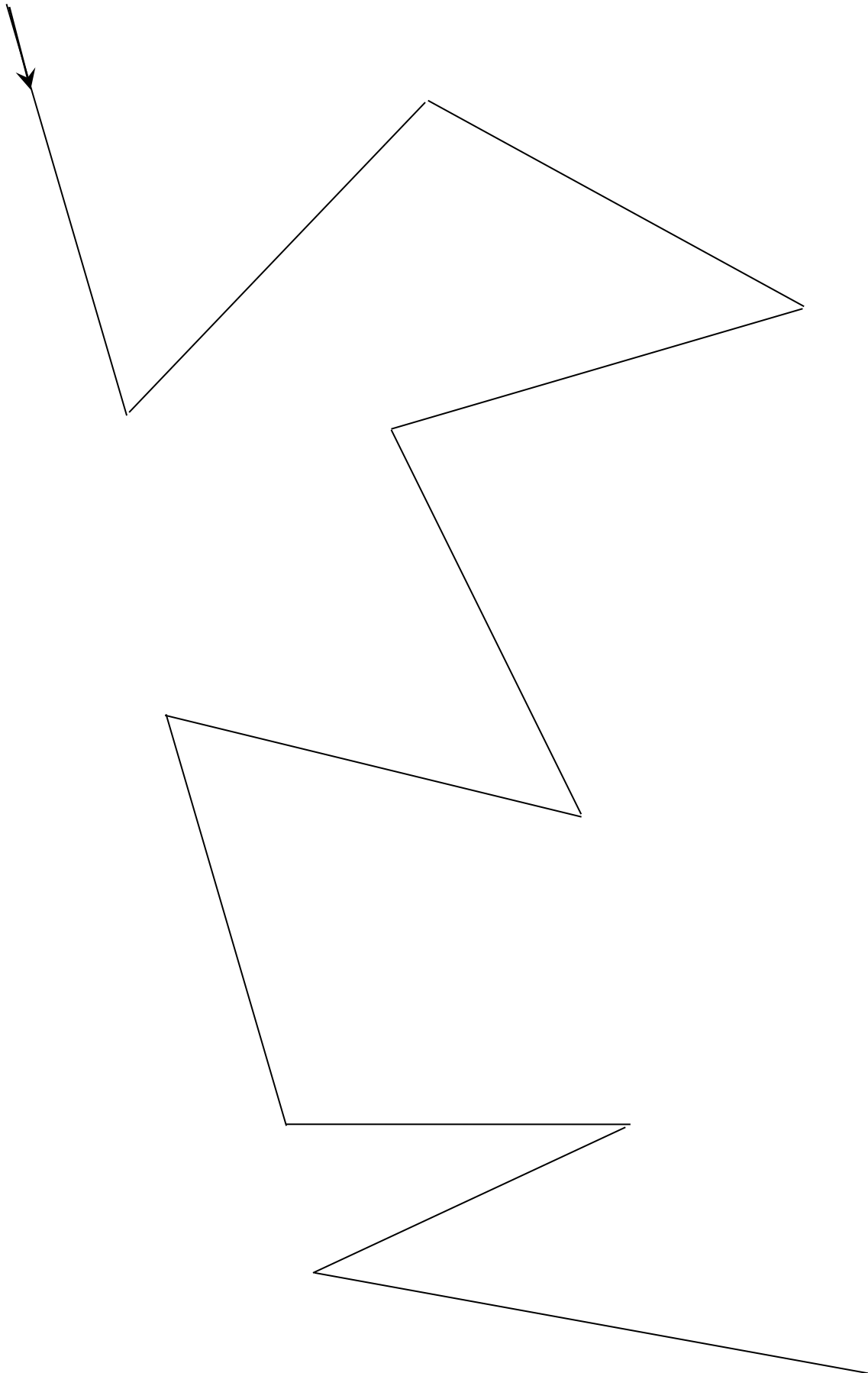
Start-/ Ziellinie

Winkeltabelle für eine zweite Runde des Schiffsrouten-Spiels

Augenzahl Würfel „Winkel“	Winkel	Augenzahl Würfel „Länge“	Länge
1	225°	1	1 cm
2	120°	2	2 cm
3	165°	3	3 cm
4	25°	4	4 cm
5	240°	5	5 cm
6	70°	6	6 cm

Wie groß sind die Richtungsänderungen bei der Schiffsroute

Zeichne jeweils erst die aktuelle Fahrtrichtung ein. Messe möglichst genau und notiere ob sich die Richtung für den Kapitän „nach links“ (mathematisch positiv) oder „nach rechts“ ändert.



Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

(In Texten der leichten Lesbarkeit halber: „Schüler“ bzw. „Lehrer“)

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg ca. 10 min UG Kurze EA UG	Winkel in der Schifffahrt L erzählt, dass Schiffe ihre Routen genau festhalten müssen, das geschah früher in Logbüchern, heute oft in einem speziellen Computer. Zwei Beispiele für Logbucheinträge finden sich auf dem AB. SuS bearbeiten Aufgabe 1 Wiederholung Winkel zeichnen: SuS zeigen wie man einen 70°-Winkel (120°, 270°) Winkel zeichnet – verschiedenen Varianten können vorgestellt werden	OHP/ Dokukamera: Abb. Schiffsroute AB Tafel, Heft
2. Übungen ca. 10 min EA	SuS bearbeiten Aufgabe 2 auf dem AB. (Teilaufgabe 2 c) kann als Puffer für schnelle dienen) L lobt, gibt Rückmeldung zur Genauigkeit, hilft. Eine Musterlösung hängt an der Tafel aus.	Heft Musterlösung
3. Spiel ca. 5 ... 10 min PA	SuS spielen das Schiffsrouten-Spiel L beobachtet, lobt präzise Zeichnungen, ermuntert ggf. zu mehr Präzision	AB, Spielplan, 2 Würfel je Gruppe
4. Spielvariante ca. 5 ... 10 min PA	Schiffsroutenspiel mit stumpfen und überstumpfen Winkeln	Neuer Spielplan, neue Winkeltabelle, 2 Würfel je Gruppe
5. Programmieren mit Winkeln L-Vortrag ca. 5...10 min PA ca. 30 min	Regelmäßige n-Ecke programmieren L erzählt, dass Winkel beim Zeichnen von vielen Figuren eine Rolle spielen, z.B. beim Quadrat. Aufgabe: mit Scratch ein Quadrat und anschließend ein regelmäßiges 5-Eck sowie 6-Eck zeichnen. L stellt hilfreiche Programmblöcke vor SuS bearbeiten die Aufgabe L beobachtet, lobt, fragt nach, berät.	Beamer, Computer bzw. Smartphone Computer bzw. Smartphone
6. Ergebnisse vorstellen ca. 10 min UG	Lösungen der SuS werden vorgestellt und ggf. unterschiedliche Lösungen verglichen	Beamer, Computer bzw. Smartphone
7. Ergänzung ca. 10 ... 20 min EA, PA EA	Ergänzung für Stunden ohne Programmieren SuS erraten ohne nachzumessen die Würfelergebnisse aus einer andern Spielgruppe SuS überprüfen ihre Ergebnisse SuS messen im AB möglichst genau Winkel nach. Ergebnisse hängen zur Kontrolle an der Tafel aus.	In 3./4. protokollierte Würfelwürfe AB Musterlösung

Lehrerblatt
Sachanalyse:

Problemlösen kann gelernt werden: es gibt zahlreiche heuristische Strategien, die beim Lösen eines Problems hilfreich sein können. Häufig benutzte Strategien sind:

- Vorwärtsarbeiten
- Rückwärtsarbeiten
- Zerlegen in Teilprobleme
- Systematisches Probieren
- Anfertigen einer Zeichnung bzw. einer informativen Figur.

Vgl. AB „Übersicht über einige wichtige Problemlösestrategien“

Oft werden auch mehrere Problemlösestrategien angewendet (z.B. Rückwärtsarbeiten und Anfertigen einer informativen Figur).

Verwendete Strategien und Aufschriebe beim AB „Problemlösen“:

Aufgabe 1:	a) Vorwärtsarbeiten b) Vorwärtsarbeiten und Rückwärtsarbeiten																																
Aufgabe 2:	Systematisches Probieren Aufschrieb: Faktoren systema- tisch ver- größert <table><tr><td>1.Faktor</td><td>2.Faktor</td><td>Summe</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>48</td><td>50</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>32</td><td>35</td><td>Wird kleiner</td></tr><tr><td>4</td><td>24</td><td>28</td><td></td></tr><tr><td>6</td><td>16</td><td>22</td><td></td></tr><tr><td>8</td><td>12</td><td>20</td><td>Kleinste</td></tr><tr><td>12</td><td>8</td><td>20</td><td></td></tr><tr><td>16</td><td>6</td><td>22</td><td>Wird wieder</td></tr></table>	1.Faktor	2.Faktor	Summe		2	48	50		3	32	35	Wird kleiner	4	24	28		6	16	22		8	12	20	Kleinste	12	8	20		16	6	22	Wird wieder
1.Faktor	2.Faktor	Summe																															
2	48	50																															
3	32	35	Wird kleiner																														
4	24	28																															
6	16	22																															
8	12	20	Kleinste																														
12	8	20																															
16	6	22	Wird wieder																														
Aufgabe 3:	Rückwärtsarbeiten + Darstellung in informativer Figur Verkauf an 1. Nachbarin Verkauf an 2. Nachbarin Verkauf an 3. Nachbarin																																
Aufgabe 4:	Zerlegen in Teilprobleme																																

Ziele:

- Bewusstmachen von wichtigen Problemlösestrategien und Reflexion über deren Einsatz
- Gezieltes Anwenden von Strategien beim Problemlösen
- Selbstvertrauen schaffen und Kompetenz erleben

Material:

- AB Problemlösen 1 und AB Problemlösen 2
- AB Problemlösen 1 auf Folie bzw. Visualizer
- AB Übersicht über wichtige Problemlösestrategien
- evtl. Mauerstein für den Einstieg in 90-Minuten-Stunden

Didaktischer Kommentar

Viele SuS schecken vor auf den ersten Blick schwierig aussehenden Aufgaben zurück. Anstatt sich in derartige Aufgaben einzudenken (und sie eventuell auch lösen zu können), setzen sie sich überhaupt nicht damit auseinander. Sie gehen automatisch von einem Misserfolgserlebnis aus. Dabei gibt es Strategien, die das Problemlösen leichter machen. Einige davon stehen im Zentrum dieser Stunde.

Die Stunde beginnt mit einer Umfrage, wie die SuS schwierige Aufgaben angehen. Dadurch soll den SuS bewusst gemacht werden, dass sie durchaus bereits über Problemlösestrategien verfügen. Gleichzeitig werden sie durch die Nennungen der anderen SuS an weitere, ihnen nicht mehr bewusste Strategien erinnert.

Im Gegensatz zu vielen anderen Stunden folgt hierauf keine Erarbeitung im Plenum, sondern eine Phase in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit (Gruppengröße maximal 3: in größeren Gruppen können sich einzelne SuS gedanklich zurückziehen). Dadurch haben die SuS die Chance, ein Problem selbst zu lösen und damit ein Erfolgserlebnis. Die Zahlenmauern in Aufgabe 1 machen den SuS in der Regel viel Spaß und sollten von allen gelöst werden können. Die Aufgaben 2 bis 4 werden für einige SuS schwierig sein. Hier benötigt es gezielte Tipps der Lehrkraft und ein Gespür dafür, wann die Arbeit sinnvollerweise im Plenum fortgesetzt werden sollte.

Bei der Besprechung im Plenum dürfen zunächst SuS ihre Lösungen vorstellen, wodurch sie eine weitere positive Rückmeldung erhalten. Im Idealfall gibt es bei einigen Aufgaben sogar mehrere Lösungswege, die verglichen werden können. Aufgabe 2 werden einige SuS durch Ausprobieren gelöst haben. In der Regel probieren die SuS aber nicht systematisch, weshalb die „Versuche“ in einer Tabelle an der Tafel übersichtlich dargestellt werden sollen (s. Lehrerblatt). Ebenso soll die Lösung zu Aufgabe 3 durch eine informative Figur an der Tafel visualisiert werden.

Die besprochenen Strategien sollen die SuS nun bei der Bearbeitung des Blattes „Problemlösen 2“ anwenden. Durch die Eintragungen in der hinteren Spalte wird den SuS bewusst, welche Strategie sie zum Lösen der Aufgabe benutzt haben. Zudem wird ihnen verdeutlicht, dass nicht immer von Anfang an die „zielführende“ Strategie gefunden werden muss. Ein großes Anliegen der Stunde ist es, den SuS Erfolgserlebnisse beim Lösen schwieriger Aufgaben zu ermöglichen. Insofern sollte die Lehrkraft die SuS gegebenenfalls behutsam unterstützen, jedoch nicht mehr helfen, als unbedingt erforderlich ist. Es ist hier auch denkbar, dass die SuS, die sich sehr schwer tun, zu einem kleinen Plenum zu sammeln und dort die Aufgaben gemeinsam zu lösen, während andere SuS in Einzel- oder Partnerarbeit arbeiten.

Den Abschluss der Stunde bildet eine zweite Reflexionsphase. Oft neigen SuS dazu, Strategien bei Rätseln und Knobelaufgaben nicht unbedingt auf den Mathematikunterricht zu übertragen. Daher soll die Frage „Fallen euch Aufgaben aus dem Unterricht ein, wo eine heute kennengelernte Strategie hilfreich wäre?“ eine (hoffentlich nachhaltige) Verbindung zwischen der heutigen Mkid-Stunde und dem Mathematikunterricht schaffen.

Übersicht über einige wichtige Problemlösestrategien

Rückwärtsarbeiten:

Was ist gesucht?

Was weiß ich über das Gesuchte?

Was benötige ich, um das Resultat daraus zu ermitteln?



Zeichnungen/ Informative Figuren als Hilfsmittel

z.B. bei „Verteilungsaufgaben“

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} + 2$	10

Systematisches Probieren

Hier ist es oft hilfreich, eine **Tabelle** zu erstellen:

Bsp.:

1. Faktor	2. Faktor	Summe
2	48	50
4	24	28

Zerlegen in Teilprobleme:

Zerlege das Problem in kleinere (Teil-) ~~probleme~~ **probleme**, die leichter gelöst werden können.

z.B. bei der Flächenberechnung von zusammengesetzten Figuren.



Vorwärtsarbeiten:

Was ist gegeben?

Was weiß ich über Das Gegebene?

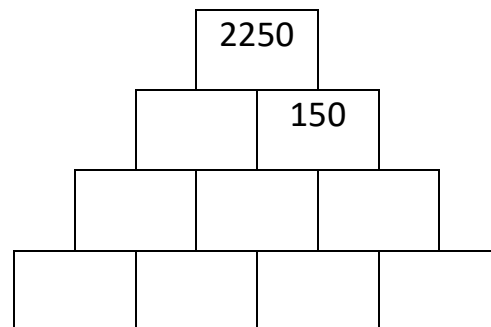
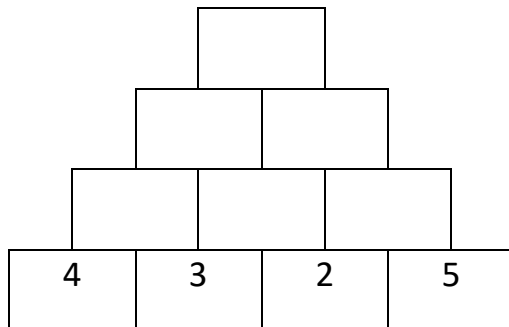
Was kann ich daraus ermitteln?



Oft ist es auch sinnvoll, mehrere Strategien miteinander zu kombinieren, z.B. *Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten*.



1. Fülle die Multiplikations-Zahlenmauer aus:



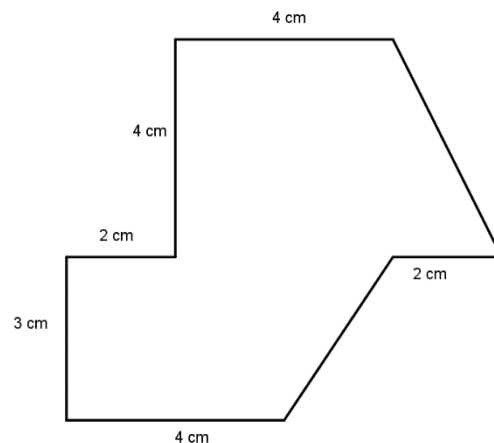
2. Zerlege die Zahl 96 in zwei Faktoren, so dass die Summe der beiden Faktoren möglichst groß wird.

3. Aus einem alten Rechenbuch:

Eine Händlerin verkauft an ihre Nachbarin die Hälfte ihrer Eier und noch eines. Vom Rest verkauft sie wieder die Hälfte und noch ein Ei an eine zweite Nachbarin. Ebenso verkauft sie an eine dritte wiederum vom Rest die Hälfte und noch ein Ei. Für sich selbst hat die Eierhändlerin danach noch ein Ei übrig.

Wie viele Eier hatte die Eierhändlerin ursprünglich?

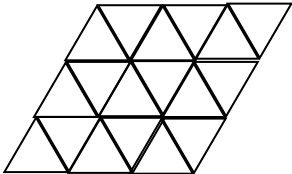
4. Berechne den Flächeninhalt der Figur:



5. Beim Lösen dieser Aufgaben habt ihr verschiedene Strategien verwendet. Mathematiker verwenden dafür die Bezeichnungen „Vorwärtsarbeiten“, „Rückwärtsarbeiten“, „Systematisches Probieren“, „Zerlegung in Teilprobleme“, „Zeichnung bzw. informative Figur“.

Überlege, welche Strategie du bei den einzelnen Aufgaben verwendet hast. (Vielleicht waren es bei manchen Aufgaben auch mehrere!)

Bearbeite die Aufgaben. Trage in die Tabelle ein, welche Problemlösestrategien du alle angewendet hast. Unterstreiche die Strategien, die zum Lösen der Aufgabe hilfreich waren, mit grüner Farbe.

		Strategie
1.	Ein Bauer hat in einem Stall Hühner und Hasen. Insgesamt sind es 16 Tiere. Diese haben zusammen 54 Beine. Wie viele Hühner und wie viele Hasen besitzt der Bauer?	
2.	Bei der Schülersprecherwahl bekommt Lilli 30%, Tim 25% und Noah 15% der Stimmen. Die restlichen Stimmen gingen an Anne und an Julian. Dabei bekam Julian doppelt so viele Stimmen wie Anne. Wie viel Prozent der Stimmen gingen an Anne, wie viel an Julian?	
3.	Drei Freunde haben Kirschen gepflückt. Da sie müde sind, wollen sie sie erst am nächsten Morgen gerecht verteilen. In der Nacht bekommt einer der Freunde Hunger und isst seinen Anteil der Kirschen auf. Kurz danach wacht der zweite Freund hungrig auf. Da er nicht weiß, dass bereits ein Teil der Kirschen aufgeessen worden ist, ist er ein Drittel von den Kirschen, die noch da sind. Das gleiche geschieht auch mit dem dritten Freund. Am nächsten Morgen sind noch 32 Kirschen da. Wie viele Kirschen hatten die Freunde gepflückt?	
4.	Wie viele Dreiecke siehst du in der Figur? 	
5.	An einem Vogelhäuschen fressen Meisen, Spatzen und Rotkehlchen. Es sind mehr Spatzen als Meisen und mehr Meisen als Rotkehlchen da. Wenn man die Anzahlen der Vögel multipliziert, ergibt sich als Produkt eine ungerade Zahl zwischen 40 und 50. Wie viele Vögel sind von den einzelnen Arten am Vogelhäuschen? – Nenne alle Möglichkeiten.	

Verwendete Strategien und Lösungen beim Schülerblatt 3:

Aufgabe 1:	Systematisches Probieren: 5 Hühner und 11 Kaninchen																								
Aufgabe 2:	30% 25% 15% 70% 30% Anne Julian Informative Figur: Anne bekommt 10 % der Stimmen, Julian 20 %.																								
Aufgabe 3:	Rückwärtsarbeiten 1. Freund 2. Freund 3. Freund 108 72 48 32 $\cdot \frac{2}{3}$ $\cdot \frac{2}{3}$ $\cdot \frac{3}{2}$ $\cdot \frac{3}{2}$ $\cdot \frac{3}{2}$ $\cdot \frac{3}{2}$																								
Aufgabe 4:	Zerlegen in Teilprobleme: 18 kleine Dreiecke, 8 mittlere Dreiecke, 2 große Dreiecke → insgesamt 28 Dreiecke																								
Aufgabe 5:	Systematisches Ausprobieren <table><tr><th>Zahl</th><th>Spatzen</th><th>Meisen</th><th>Rotkehlchen</th></tr><tr><td>41 Primzahl</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>43 Primzahl</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>45</td><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>47 Primzahl</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>49 = 7 · 7, dann gäbe es aber gleich viele Spatzen wie Meisen</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Zahl	Spatzen	Meisen	Rotkehlchen	41 Primzahl				43 Primzahl				45	9	5	1	47 Primzahl				49 = 7 · 7, dann gäbe es aber gleich viele Spatzen wie Meisen			
Zahl	Spatzen	Meisen	Rotkehlchen																						
41 Primzahl																									
43 Primzahl																									
45	9	5	1																						
47 Primzahl																									
49 = 7 · 7, dann gäbe es aber gleich viele Spatzen wie Meisen																									

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit GA ... Gruppenarbeit (max. 3 SuS pro Gruppe!)

FEU ... fragendentwickelnder Unterricht. Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	Ihr kennt das alle: Manchmal sind Aufgaben schwer und ihr wisst nicht sofort, wie ihr sie lösen sollt. Wie geht ihr solche Aufgaben an? SuS schildern ihre Erfahrungen Info: Es gibt bestimmte Tricks, wie man schwere Aufgaben angehen kann. Einige davon wollen wir heute kennenlernen und anwenden.	
2. Erarbeitung 1 EA/PA/GA 10 Min.	SuS bearbeiten alleine, zu zweit oder in Dreiergruppen das AB „Problemlösen 1“ (so weit wie sie kommen).	AB „Problem-lösen 1“
3. Ergebnis 1 FEU 12 Min.	Besprechung von AB „Problemlösen 1“: SuS stellen ihre Lösungen vor. Gab es auch andere Lösungswege? Gemeinsamer Tafelaufschrieb zu Aufg. 2 und 3 (evtl. auch zu Aufg. 4): s. Lehrerblatt	Visualizer Bzw. AB auf OPH-Folie
4. Reflexion 1 FEU 8 Min.	Bearbeitung von Aufg. 5: welche Strategien habt ihr angewendet? Was bedeutet „Vorwärtsarbeiten beim Problemlösen?“ Was bedeutet „Rückwärtsarbeiten beim Problemlösen?“ AB „Übersicht über wichtige Problemlösestrategien“ austeilen und die Strategien kurz besprechen: bei welchem Problem ist welche Strategie sinnvoll?	AB „Übersicht über wichtige Problemlöse-strategien“
5. Anwendung EA/PA/GA 20 Min.	SuS bearbeiten AB „Problemlösen 2“ (alleine, zu zweit oder in Dreiergruppen) Lehrkraft gibt SuS ggfs. Tipps (nennt z.B. eine zielführende Strategie) bzw. löst Aufgabe gemeinsam mit SuS, die alleine keine Aufgabe lösen können.	AB „Problem-lösen 2“
6. Reflexion 2 FEU 5 Min.	Welche Strategie habt ihr jeweils angewendet? Welche Strategie war hilfreich, welche nicht? Fällt euch eine Aufgabe aus dem Unterricht ein, wo eine bestimmte Strategie hilfreich wäre?	

Möglicher Einstieg für 90-Minuten-Stunden:

Die Lehrkraft zeigt einen Mauerstein (oder ein Bild davon): Notiert möglichst viele Verwendungszwecke für einen derartigen Mauerstein.

Bei der Besprechung wird herausgearbeitet, dass es für den Mauerstein viele Verwendungszwecke gibt, an die im ersten Moment nicht gedacht wird. Ähnlich ist es auch beim Lösen von Problemen: oft gibt es Lösungen, an die zunächst nicht gedacht wird. Nichtsdestotrotz gibt es verschiedene Strategien beim Problemlösen, die erlernt werden können.

Lehrerblatt**Sachanalyse:**

Brüche bezeichnen einen Teil eines Ganzen: Um beispielsweise $\frac{6}{8}$ eines Ganzen zu markieren, wird das Ganze in 8 gleich große Teile unterteilt, davon werden 3 Teile markiert. Der Nenner gibt also die Zahl der Teile an, in die das Ganze unterteilt wird und der Zähler die Zahl der Teile, die markiert werden.

Verschiedene Brüche können denselben Anteil eines Ganzen beschreiben: Geometrisch können beispielsweise beim Bruch $\frac{6}{8}$ jeweils 2 Teile zu einem größeren zusammengefasst werden. Das Ganze ist dann in 4 Teile unterteilt, wovon 3 markiert sind. Die beiden Brüche $\frac{6}{8}$ und $\frac{3}{4}$ beschreiben also denselben Anteil. Rechnerisch entspricht dies dem Kürzen /Erweitern: Zähler und Nenner des Bruchs werden durch dieselbe Zahl dividiert / mit derselben Zahl multipliziert.

Wenn zwei Brüche auf einen gemeinsamen Nenner erweitert werden sollen, ist der neue Nenner ein gemeinsames Vielfaches der Nenner. Der kleinste gemeinsame Nenner wird als Hauptnenner bezeichnet. Geometrisch gesehen muss das Ganze in ein gemeinsames Vielfaches der beiden Nenner unterteilt werden können.

Soll umgekehrt geometrisch von einem Bruchteil auf das Ganze geschlossen werden, so muss beispielsweise beim Bruch $\frac{6}{8}$ die markierte Fläche in 6 gleich große Teile unterteilt werden. 8 dieser Teile bilden das Ganze.

Ziele:

- intuitives Verständnis des Bruchbegriffs schulen durch Begreifen (im wahrsten Sinn des Wortes!) von Bruchteilen eines Ganzen.
- erfahren, was Kürzen/Erweitern von Brüchen sowie ein gemeinsamer Nenner zweier Brüche geometrisch bedeuten.
- Umkehrung: von einem Bruchteil auf das Ganze schließen.
- Überlegungen und Begründungen formulieren.
- Kompetenzerleben

Material:

- Geobretter und Gummis
- Schülerblatt: Brüche auf dem Geobrett
- Schülerblatt: Eigene Geobrett-Figuren erfinden

Didaktischer Kommentar

Die Stunde sollte nach der Einführung der Brüche gehalten werden. Das Kürzen/Erweitern von Brüchen muss noch nicht bekannt sein – es wird in dieser Stunde motiviert. Es ist aber auch kein Problem, wenn die SuS bereits Brüche kürzen bzw. erweitern können. Die Stunde stellt dann eine Vertiefung dar.

Der Anteilsaspekt von Brüchen (s. Sachanalyse) wird auch im regulären Mathematikunterricht veranschaulicht. Da hier aber oft nicht viel Zeit dafür zur Verfügung steht, bilden viele SuS kein vertieftes Verständnis zum Bruchbegriff aus. Des Weiteren werden das Erweitern und Kürzen oft nur als automatisierte „Rechenoperationen“ mit dem Bruch aufgefasst.

Hier setzt diese Stunde an: Durch Veranschaulichungen auf dem Geobrett sollen die SuS kognitiv und haptisch begreifen, was unter einem Bruch verstanden werden kann und wie das Erweitern und Kürzen geometrisch interpretiert werden können. Tims Behauptung stellt die Verknüpfung zum algebraischen Kürzen her: Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.

Im Unterrichtsgespräch zum Einstieg sollten folgende Aspekte thematisiert werden:

- Es gibt meist mehrere Möglichkeiten, einen Anteil eines Bruches zu markieren.
- Ein Bruchteil, wie z.B. $\frac{3}{8}$, ist keine absolute Größe, sondern eine relative Größe. Folglich kommt es nicht auf Größe und Form des Ganzen an. Ein Bruchteil kann somit auf Geobrettern verschiedener Größen veranschaulicht werden.

Die Stunde soll auch zur Schulung der Kompetenz „Begründen“ genutzt werden. Somit ist darauf zu achten, dass die SuS bei Aufgabe 1 und 2 ihre Überlegungen schriftlich formulieren und ihre Antworten begründen.

Die Umkehraufgabe (Aufgabe 3) wird einigen SuS schwerfallen. Sie sollte daher gemeinsam bearbeitet werden, um für mehr SuS Kompetenzerleben zu ermöglichen.

Aufgabe 4 bereitet das Erweitern zweier Brüche auf einen gemeinsamen Nenner vor: einige SuS werden vermutlich schnell erkennen, dass zwei Brüche auf demselben Geobrett dargestellt werden können, wenn die Felderzahl dieses Geobretts ein gemeinsames Vielfache der beiden Nenner ist. Andere SuS werden erst durch Ausprobieren auf das gemeinsame Vielfache der beiden Nenner kommen. Innerhalb der Aufgabe steigt der Schwierigkeitsgrad folgendermaßen:

- In a) ist der Nenner 16 ein Vielfaches des Nenners 2.
- In b) sind die beiden Nenner teilerfremd – der gemeinsame Nenner entspricht somit dem Produkt der beiden Nenner.
- In c) sind die beiden Nenner nicht teilerfremd – das Produkt der beiden Nenner ist ein möglicher gemeinsamer Nenner, der kleinste gemeinsame Nenner entspricht aber dem kgV (= kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der beiden Nenner.

SuS, die Aufgabe 4 schnell lösen konnten, können nun eigene Nagelbrett-Figuren erfinden. Dabei sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt. Nach der Besprechung von Aufgabe 4 dürfen die SuS ihre Nagelbrett-Figuren präsentieren. Es ist auch denkbar, die originellste Nagelbrettfigur zu prämiieren.

Brüche auf dem Geobrett

Aufgaben:

1. Stellt auf eurem Geobrett ein 5x5-Geobrett her, indem ihr mit einem großen Gummi ein 5x5-Rechteck umspannt. Stellt dann mit einem kleineren Gummi folgende Bruchteile innerhalb des 5x5-Rechtecks auf mindestens 2 verschiedene Arten dar:

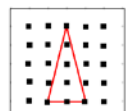
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{16}, \frac{4}{16}$$

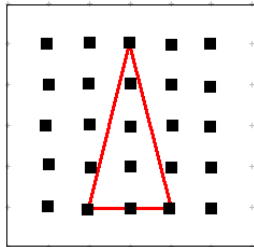
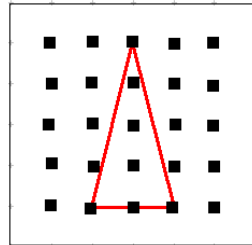
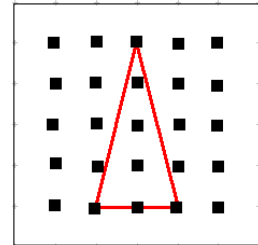


2. Stellt ebenso mit einem weiteren Gummi auf dem "Geobrett" ein 3x3-Geobrett dar. Welche der Bruchteile aus Aufgabe 1 können auch mit dem 3x3-Geobrett dargestellt werden? Welche nicht - begründet.

Tim behauptet: "Das dauert doch viel zu lange. Ich kann auch ohne Geoboard entscheiden, welche der Bruchteile aus Aufgabe 3 mit dem 3x3-Geobrett dargestellt werden können." Wie macht Tim das wohl?

3. Nun stellt das Gummi einen Teil eines Ganzen dar. Spanne das Ganze auf, wenn die mit dem Gummi umspannte Fläche den genannten Bruchteil darstellt. Zeichne ein – gibt es immer nur eine Lösung?



den Bruchteil $\frac{1}{2}$ den Bruchteil $\frac{1}{3}$ den Bruchteil $\frac{2}{3}$ 

4. Wie viele Felder muss ein Geobrett haben, damit sich folgende Brüche gemeinsam im gleichen Brett darstellen lassen? Begründe und kontrolliere auf dem Geobrett. Suche dabei jeweils das kleinstmögliche Geobrett heraus.

a) $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{16}$

b) $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$

Auch hier schafft Tim es, ohne Geobrett eine Lösung zu finden. Was überlegt er sich wohl?

Kreativaufgabe:

- o Erfinde auf einem 5x5-Geobrett für deinen Nachbarn bzw. deine Nachbarin eine eigene einfache oder mittelschwere oder schwere Figur. (Vielleicht kannst du einen Buchstaben darstellen oder ein Tier?)
Dein Nachbar/deine Nachbarin zeichnet diese Figur in das Arbeitsblatt ein und bestimmt den zugehörigen Bruch. (Du selbst hast dir natürlich auch die Lösung deiner Aufgabe überlegt!)
- o Ist der von dir gespannte Bruchteil größer als $\frac{1}{2}$? Kannst du dies mit 2 verschiedenen Methoden feststellen?

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit GA ... Gruppenarbeit (max. 4 SuS pro Gruppe!)

feU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg feU 5 Min.	L spannt auf einem 5x5-Geobrett verschiedene Figuren mit einem Gummi, SuS nennen jeweils den Anteil der gespannten Figur an der Gesamtfläche / begründen ihre Antwort. L spannt mit einem großen Gummi ein 3x5-Geobrett auf: Was hat sich geändert? Ebenfalls verschiedene Figuren aufspannen und den Anteil nennen lassen.	Geobrett Gummis
2. Erarbeitung 1 feU 5 Min. PA 15 Min.	Austeilen der Geobretter für die Partnerarbeit Gemeinsam den Bruchteil $\frac{3}{4}$ auf verschiedene Arten darstellen (zunächst auf 5x5-Geobrett, dann auf Geobrett anderer Größe). SuS bearbeiten Aufg. 1 und 2 auf dem AB „Brüche auf dem Geobrett“.	Geobrett Gummis AB „Brüche auf dem Geobrett“
3. Ergebnis 1 feU 5 Min.	Besprechung von Aufgabe 1+2. Impulse für das L-S-Gespräch: <i>Warum kann der Bruchteil $\frac{4}{8}$ auch auf dem 3x3-Geobrett dargestellt werden, aber nicht $\frac{5}{8}$? (4 von 8 ist der gleiche Anteil wie 2 von 4; 5 von 8 wäre 2,5 von 4). Welche Brüche aus Aufgabe 1 stellen alle denselben Anteil dar? Kann ich dies – ohne Geobrett – an den Brüchen erkennen?</i>	Tafel
4. Erarbeitung 2 feU 7 Min. PA 15 Min.	Gemeinsame Bearbeitung von Aufgabe 3. (Es gibt immer mehrere Lösungsmöglichkeiten) SuS bearbeiten Aufgabe 4 in Partnerarbeit, je nach Leistungsfähigkeit der Lerngruppe macht die Lehrkraft vorab ein Beispiel. Puffer für schnelle Paare: Kreativaufgabe	Kopie „Nagelbretter“
5. Ergebnis 2 feU 8 Min.	Besprechung von Aufgabe 4. Impulse für das L-S-Gespräch: <i>Was ist bei a) leichter als bei b) und c)? Wie findet man die kleinstmögliche Größe des Geobretts? Vorstellung einiger während der Kreativaufgabe entworfener Figuren.</i>	

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Stammbrüche sind Brüche mit dem Zähler 1. Sie sind die ältesten Brüche, die man kennt. Gegenüber anderen Brüchen zeichnen sie sich aus, weil man nur eine Zahl (den Nenner) zu ihrer Beschreibung benötigt. Deshalb kann man auch einfachere Rechenregeln für Stammbrüche formulieren: Man erhält das Produkt zweier Stammbrüche, indem man die Nenner multipliziert. Das ist dann der Nenner des Produkt-Stammbruchs. Die Summe zweier Stammbrüche ist in der Regel kein Stammbruch. Der Summenbruch hat als Zähler die Summe der Nenner und als Nenner das Produkt der Nenner der jeweiligen Summanden.

Dabei kann man mit Bruchbildern arbeiten.

Problemstellung: Lässt sich 1 als Summe dreier Stammbrüche darstellen.

Lösung: es gibt genau 3 Darstellungen

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Die Schüler(innen) können das selbst entdecken.

Erweiterungen wären 1 als Darstellung von 2, 4, 5, 6 Stammbrüchen.

Viel schwieriger ist es zu zeigen, dass es keine weiteren Darstellungen gibt. Das kann nur besonders schnellen Schüler(innen) vorbehalten bleiben. Dazu muss man diese Summen systematisch aufschreiben.

Die Stammbrüche kann man leicht in eine Reihenfolge bringen: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$ Diese Folge ist streng

monoton abnehmend. Da man die Summanden vertauschen kann, schreiben wir die Summen so auf, dass die Summanden abnehmen oder gleichbleiben. Der dritte Summand ergibt sich automatisch als Ergänzung zu 1. Ist er größer als der Vorgänger, dann gibt es keine weiteren.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \quad 0 \text{ ist kein Stammbruch}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1 \quad \frac{3}{10} \text{ ist größer als } \frac{1}{5}, \text{ fertig mit } \frac{1}{2} \text{ als erster Summand.}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1 \quad \frac{5}{12} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}, \text{ fertig mit } \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}; \text{ fertig mit } \frac{1}{4}.$$

Jetzt geht es nicht mehr weiter, weil man als dritten Summanden einen größer als $\frac{1}{2}$ benötigen würde.

Ziele:

- reflektieren, wie die Rechengesetze für Brüche lauten

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe hat von der mathematischen Erkenntnis keinen besonders hohen Anreiz. Der historische Gedanke, dass im alten Ägypten nur mit Stammbrüchen gerechnet wurde, kann dem ein wenig entgegenwirken. Insgesamt wird man den Fokus auf vereinfachte Rechenregeln für Stammbrüche legen und dabei noch einmal die Rechenregeln für Brüche reflektieren.

Für besonders schnelle Schüler(innen) kann man die Frage "Haben wir alle?" diskutieren lassen. Dabei kommt die Problemlösestrategie "Systematisch aufschreiben" zum Tragen. Das sollte dann auch betont werden.

Die Rechenregeln für Stammbrüche sind einfacher als für gewöhnliche Brüche. Die Schüler(innen) können diese selbst entdecken und dann z.B. in einem Spiel anwenden. Sie helfen, sich noch einmal mit den Rechenregeln für Brüche auseinanderzusetzen.

Insgesamt ist nicht der Inhalt, sondern der Weg dazu das Ziel. Insbesondere geht es um das Bruchrechnen-Üben, nicht aber um die Stammbrüche als solche.

Tafelanschrieb

Rechenregeln für Stammbrüche: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$ Stammbrüche werden multipliziert, indem man die Nenner multipliziert. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$ Stammbrüche werden addiert, indem man die Summe der Nenner in den Zähler und das Produkt der Nenner in den Nenner schreibt.	<u>Stammbrüche</u> Ein Stammbruch ist ein Bruch mit Zähler 1, z.B. $\frac{1}{3}$. Der Stammbruch $\frac{1}{3}$ teilt ein Ganzes in 3 Teile. Wie kann man ein Ganzes aus Stammbrüchen zusammenfügen. Beispiel: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ Suche möglichst viele Möglichkeiten 1 als Summe dreier Stammbrüche darzustellen. Lösung: $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}; 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}; 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	Zum Vergleich Rechenregeln für Brüche: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$ Brüche werden multipliziert, indem man Zähler und Nenner jeweils miteinander multipliziert. $\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{26}{21}$ Brüche werden addiert, indem man sie auf den Hauptnenner erweitert und dann die Zähler addiert.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Problemstellung und Motivation FEU 5 Min.	L erklärt was ein Stammbruch ist, evtl. Geschichte der Stammbrüche z.B.: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/aegyptischedarstellung.htm	Tafel
2. Erarbeitung I FEU 10 Min.	Rechenregeln für Stammbrüche: Kann man die Regeln zum Addieren und Subtrahieren von Brüchen für Stammbrüche vereinfachen?	Tafel
3. Problemstellung FEU 5 Min.	Interpretation eines Stammbruchs $\frac{1}{3}$ als Zerlegung von einem Ganzen in 3 Teile. Kann man ein Ganzes als Summe von Stammbrüchen darstellen? Z.B. ist $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ die einzige Möglichkeit mit 2 Summanden. Warum gibt es keine weiteren? Problem: Finde möglichst viele Arten 1 als Summe von 3 Stammbrüchen darzustellen?	Tafel
4. Erarbeitung II EA 10 Min.	Suche möglichst viele Summen. L geht umher und gibt Tipps.	Heft
5. Sicherung FEU 5 Min.	L trägt die gefundenen Summen an der Tafel zusammen.	Tafel
6. Problemstellung und Erarbeitung III PA 15 Min.	Weiterer Verlauf je nach Qualität der Ergebnisse. 1 als Summe von 4 Stammbrüchen oder Haben wir alle „Dreier-Summen“ gefunden? Hinweis auf Strategie "Systematisch aufschreiben" oder Wie kam man eigentlich auf die Rechenregeln für Brüche? Könnt ihr das in Bildern erklären?	Heft
7. Sicherung FEU 10 Min.	Zusammentragen und Diskussion der Ergebnisse	Tafel

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Stammbrüche sind Brüche mit dem Zähler 1. Sie sind die ältesten Brüche, die man kennt. Gegenüber anderen Brüchen zeichnen sie sich aus, weil man nur eine Zahl (den Nenner) zu ihrer Beschreibung benötigt. Deshalb kann man auch einfachere Rechenregeln für Stammbrüche formulieren:

Man erhält das Produkt zweier Stammbrüche, indem man die Nenner multipliziert. Das ist dann der Nenner des Produkt-Stammbruchs.

Die Summe zweier Stammbrüche ist in der Regel kein Stammbruch. Der Summenbruch hat als Zähler die Summe der Nenner und als Nenner das Produkt der Nenner der jeweiligen Summanden.

Problemstellung: Lässt sich 1 als Summe dreier Stammbrüche darstellen.

Lösung: es gibt genau 3 Darstellungen

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Viel schwieriger ist es zu zeigen, dass es keine weiteren Darstellungen gibt. Dazu muss man diese Summen systematisch aufschreiben.

Die Stammbrüche kann man leicht in eine Reihenfolge bringen: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$ Diese Folge ist streng

monoton abnehmend. Da man die Summanden vertauschen kann, schreiben wir die Summen so auf, dass die Summanden abnehmen oder gleichbleiben. Der dritte Summand ergibt sich automatisch als Ergänzung zu 1. Ist er größer als der Vorgänger, dann gibt es keine weiteren.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \quad 0 \text{ ist kein Stammbruch}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1 \quad \frac{3}{10} \text{ ist größer als } \frac{1}{5}, \text{ fertig mit } \frac{1}{2} \text{ als erster Summand.}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1 \quad \frac{5}{12} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}, \text{ fertig mit } \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}, \text{ fertig mit } \frac{1}{4}.$$

Jetzt geht es nicht mehr weiter, weil man als dritten Summanden einen größer als $\frac{1}{2}$ benötigen würde.

Ziele:

- erkennen, dass man schwierige Aufgaben durch Anwendung universeller Problemlösestrategien lösen kann
- die Problemlösestrategie „systematisch vorgehen“ erproben
- ganz nebenbei: Addition von Brüchen üben

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe hat von der mathematischen Erkenntnis keinen besonders hohen Anreiz. Der historische Gedanke, dass im alten Ägypten nur mit Stammbrüchen gerechnet wurde, kann dem ein wenig entgegenwirken. Es bietet auch einen Exkurs bei zu viel verfügbarer Restzeit (z.B. 90 Min.-Unterricht) an. Motto: Braucht man überhaupt andere als Stammbrüche?

Auch hier sollte der Fokus auf die Frage "Haben wir alle?" gelegt werden. Dabei kommt die Problemlösestrategie "Systematisch aufschreiben" zum Tragen. Das sollte dann auch betont werden. Man macht sich die Aufgabe einfacher, wenn man die Kommutativität der Addition berücksichtigt und die ersten beiden Summanden so aufschreibt, dass der erste nie kleiner als der zweite ist. Der dritte Summand ergibt sich als Ergänzung zur 1. Wenn dann dieser größer als der zweite Summand ist, dann ist man mit dieser Reihe fertig.

Dies ist schwierig und kann motiviert werden, indem man zuerst einmal auf dieses Absteigen der Summanden verzichtet und die entstehenden Doppelungen thematisiert. Können wir diese vermeiden?

Man kann das Aufschreiben auch an der Aufgabe 10 als Summe dreier natürlicher Zahlen üben:

$10 = 10 + 0 + 0$; $10 = 9 + 1 + 0$; $10 = 8 + 2 + 0$; $10 = 8 + 1 + 1$; $10 = 7 + 3 + 0$; $10 = 7 + 2 + 1$...

Warum schreibt man nicht $10 = 9 + 0 + 1$?

Die Rechenregeln für Stammbrüche sind optional zu behandeln. Sie helfen, sich noch einmal mit den Rechenregeln für Brüche auseinanderzusetzen. Man kann diesen Abschnitt auch als Puffer ans Ende setzen, oder eben am Anfang, wenn man schon weiß, dass viel Zeit ist.

Insgesamt ist nicht der Inhalt, sondern der Weg dazu das Ziel. Insbesondere geht es um das Bruchrechnen-Üben und um systematisches Aufschreiben, nicht aber um die Stammbrüche als solche.

Tafelanschrieb

Rechenregeln für Stammbrüche:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

Stammbrüche werden multipliziert, indem man die Nenner multipliziert.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$$

Stammbrüche werden addiert, indem man die Summe der Nenner in den Zähler und das Produkt der Nenner in den Nenner schreibt.

Stammbrüche

Ein Stammbruch ist ein Bruch mit Zähler 1, z.B. $\frac{1}{3}$.

Der Stammbruch $\frac{1}{3}$ teilt ein Ganzes in 3 Teile.

Wie kann man ein Ganzes aus Stammbrüchen zusammenfügen.

Beispiel: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Suche alle Möglichkeiten 1 als Summe dreier Stammbrüche darzustellen.

Lösung:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Systematisch aufschreiben:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \dots 0 \text{ ist kein Stammbruch}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1$$

$\frac{3}{10}$ ist größer als $\frac{1}{5}$, fertig mit $\frac{1}{2}$ als erster Summand.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1 \quad \frac{5}{12} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}, \text{ fertig mit } \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}; \text{ fertig mit } \frac{1}{4}$$

jetzt immer größer als der Vorgänger, also haben wir alle.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Problemstellung und Motivation FEU 5 Min.	L erklärt was ein Stammbruch ist, evtl. Geschichte der Stammbrüche z.B: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/aegyptischedarstellung.htm	Tafel
2. Erarbeitung I optional FEU 10 Min.	Rechenregeln für Stammbrüche: Kann man die Regeln zum Addieren und Subtrahieren von Brüchen für Stammbrüche vereinfachen?	Tafel
3. Problemstellung FEU 5 Min.	Interpretation eines Stammbruchs $\frac{1}{3}$ als Zerlegung von einem Ganzen in 3 Teile. Kann man ein Ganzes als Summe von Stammbrüchen darstellen? Z.B. ist $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ die einzige Möglichkeit mit 2 Summanden. Warum gibt es keine weiteren? Problem: Auf wie viele Weisen kann man 1 als Summe von 3 Stammbrüchen darstellen?	Tafel
4. Erarbeitung II EA 10 Min.	Suche möglichst viele Summen. L läuft umher und gibt Tipps.	Heft
5. Sicherung FEU 5 Min.	L trägt die gefundenen Summen an der Tafel zusammen.	Tafel
6. Problemstellung und Erarbeitung III PA 15 Min.	Sind das alle? Hinweis auf Strategie "Systematisch aufschreiben"	Heft
7. Reflexion FEU 10 Min.	Diskussion: Warum können wir sicher sein, dass es nicht mehr Summen gibt?	

Lehrerblatt

Sachanalyse und didaktischer Kommentar:

Eine wichtige mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenz besteht darin, Abhängigkeiten zwischen zwei Größen in Graphen darzustellen. Ebenso wichtig ist es, Graphen zu interpretieren und aus ihnen Zusammenhänge zwischen den Größen abzulesen.

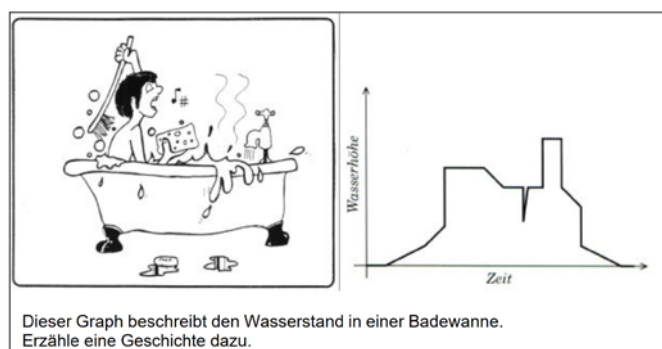
In dieser Stunde werden vor allem so genannte Füllkurven betrachtet. Das sind Graphen von Funktionen, die die Füllhöhe in einem Gefäß in Abhängigkeit der zugegebenen Wassermenge beschreiben.

Ablauf:

- Die Stunde beginnt mit einem gemeinsamen Einstiegsexperiment: In ein Gefäß wird portionsweise Wasser gegeben und nach jeder Wasserzugabe die Füllhöhe des Gefäßes ermittelt. Die Messwerte werden in einer Tabelle dargestellt. Hierbei kann bereits diskutiert werden, ob immer die gleiche Wassermenge (z.B. immer 50 ml) zugegeben werden muss.
- Die Erfassung von Messwerten in einer Tabelle ist den SuS vertraut, die Darstellung in einem Graphen nicht unbedingt. In diesem Fall zeichnet die Lehrkraft zwei Achsen an die Tafel und entwickelt dann den Graphen gemeinsam mit den SuS.
 - Welche Größe stellen wir sinnvollerweise auf welcher Achse dar?
 - Welchen Maßstab wählen wir?
 - Wie beschriften wir die Achsen?
 - Wie sieht die Kurve aus, wenn das Wasser gleichmäßig aus dem Wasserhahn zufließt?
 → leitet über vom Punktdiagramm zur stetigen (als Linie durchgezeichneten) Kurve
- Die SuS erstellen nun in Partnerarbeit oder Dreiergruppen (je nach Anzahl der vorhandenen Gefäße!) eine Füllkurve für ein Gefäß.
- Interpretiert werden diese Kurven dadurch, dass alle Kurven an der Tafel gesammelt werden und anschließend den Gefäßen zugeordnet werden. Hier kann intensiv über Zusammenhänge diskutiert werden (*Woran erkennt man im Graphen, dass das Gefäß unten sehr weit war?...*)
- Sollte nun noch Zeit sein, so kann das „Badewannendiagramm“ gezeigt werden: Die SuS schreiben in Einzelarbeit eine dazu passende Geschichte. Zur Kontrolle lesen sie diese einem Partner oder im Plenum vor (erfahrungsgemäß wollen viele SuS ihre Geschichte im Plenum vorlesen bzw. sind gespannt auf die Geschichten der anderen SuS)

Ziele:

- Graphen zur Darstellung der Abhängigkeit zwischen zwei Größen kennenlernen
- Messreihen durchführen und die Messwerte in einem Graphen darstellen
- Graphen interpretieren
- evtl.: Eine Geschichte in einem Graphen umsetzen



Quelle: <http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/sinus/pdf-Dokumente/01Zuordnungen.pdf>
 Nach einer Idee von W. Herget: Die etwas andere Aufgabe. In: mathematik lehren 68 (1995), S.67

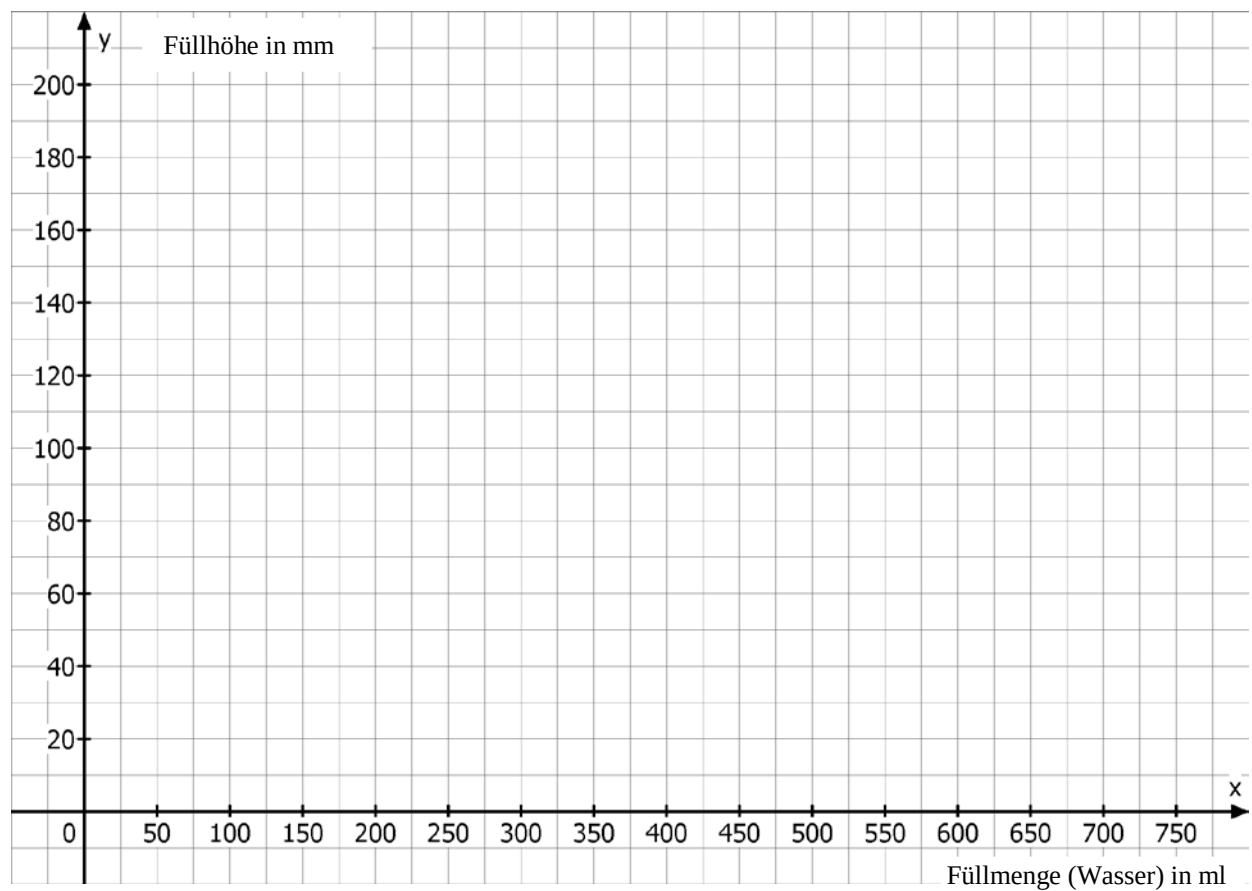
Material:

- Verschiedene Gefäße (z.B. Kugelförmige Blumenvase, Weizenbiertglas, Sektglas, Milchflasche, Erlenmeyerkolben aus der Chemiesammlung...), pro Schülergruppe 1 Gefäß + 1 Gefäß für Demo-Experiment
- 1 Messstab pro Gruppe (es kann auch ein langer Bleistift in das Wasser gehalten werden)
- 1 Messzylinder für jede Schülergruppe

"Füllkurve" eines Gefäßes

Gieße eine bestimmte Menge Wasser (z.B. 50 ml) in dein Gefäß. Lies die Füllhöhe ab und trage sie in eine Tabelle ein. Gieße wieder Wasser nach und trage weiter ein. Zeichne zu deiner Tabelle eine Grafik.

Füllmenge in ml	0	50											
Füllhöhe in mm													



Tafelanschrieb

Wir erstellen eine Füllkurve für ein
Gefäß

Gefäß:



Vorgehen:

Wir geben portionsweise Wasser in das Gefäß.

Nach jeder Wasser-Zugabe messen wir mit einem Lineal die Füllhöhe im Gefäß.

Tabelle:

Füllmenge in ml	100	200	350	...
Füllhöhe in mm	10	22	38	

Schaubild:

Aufgabe:

Erstelle für ein weiteres Gefäß eine Füllkurve.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 4. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg und Erarbeitung Experiment und Problemstellung FEU 20 Min.	Einstiegsexperiment: L füllt in ein Gefäß (z.B. Erlenmeyerkolben) kleine Portionen Wasser. S messen nach jeder Wasserzugabe mit einem Lineal die Füllhöhe. Die Werte werden in einer Tabelle festgehalten. Wie kann man die Werte übersichtlicher darstellen? → Diagramm Entwicklung eines Diagramms an Tafel (Achsen, Maßstab...) Wie sieht das Diagramm aus, wenn das Wasser gleichmäßig aus dem Wasserhahn in das Gefäß fließt?	Gefäß (z.B. Erlenmeyerkolben), Lineal Messzylinder Tafel
2. Erarbeitung: Aufnahme einer eigenen Füllkurve PA bzw. GA 20 Min.	SuS - wählen ein Gefäß aus - überlegen, wie die Füllkurve aussieht. - erstellen die Füllkurve auf ein Extrablatt und hängen dieses an die Tafel - Puffer für schnelle SuS: SuS nehmen Füllkurve eines weiteren Gefäßes auf oder SuS erfinden selbst ein Gefäß, zeichnen dafür die Füllkurve.	Gefäß (z.B. Erlenmeyerkolben), Lineal Messzylinder
3. Interpretation der Graphen PA, FEU 15 Min.	Die erstellten Füllkurven werden an die Tafel gehängt, die verwendeten Gefäße werden auf das Pult gestellt. PA: SuS ordnen die Füllkurven den Gefäßen zu. FEU: Besprechung der Ergebnisse: Begründet, weshalb die Füllkurve genau so aussieht. Wie würde die Füllkurve bei dem ... Gefäß aussehen?	Tafel
Aufräumen 5 Min.	Die Gefäße und Messzylinder werden abgetrocknet. Die Tische werden abgewischt und abgetrocknet.	
4. Vertiefung Interpretation von Graphen	L. zeigt Badewannenbild und Graphik dazu. EA SuS schreiben Geschichte dazu PA SuS lesen ihre Geschichte einem Partner vor, diskutieren über die Richtigkeit der Geschichte Puffer: SuS erfinden selbst eine Geschichte und zeichnen dazu den Graphen (Alternative: Sie erstellen ein Weg-Zeit-Diagramm für eine Autofahrt oder für ihren Schulweg)	Folie oder Kopien mit Badewannenbild

Didaktischer Kommentar und Sachanalyse**Ziele:**

In dieser Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler Fragen aus der Natur bzw. dem Alltag experimentell untersuchen, Spaß am Experimentieren entwickeln und einen Ausblick auf das folgende Schuljahr erhalten, in dem sich Mkid auch mit der Physik befassen wird.

Konkret sollen die Schülerinnen und Schüler bei Eiern herausfinden, ob diese roh oder gekocht sind, ohne die Eier zu öffnen. Dazu werden Modell-Experimente durchgeführt.

Zur Unterscheidung werden die Eier letztlich in Rotation versetzt. Für eine physikalische Erklärung der Beobachtungen, die man dabei macht, wären abstrakte Begriffe (Drehimpuls, Drehimpulserhaltung, Rotationsenergie) nötig, die hier nicht zur Verfügung stehen. Daher soll auch keine Erklärung der Beobachtungen vorgenommen werden.

Ziel der Stunde ist es stattdessen, ein einfaches Modellexperiment zu entwerfen und zu verwenden, bei dem wir die wichtigen Eigenschaften (flüssige oder feste Füllung) sehen und kontrollieren können. Die Beobachtungen am Modell werden dann auf die ursprüngliche Frage übertragen (z.B. „Ein Ei mit flüssiger Füllung hört schneller auf zu rotieren als eines mit fester Füllung“).

Genaues Beobachten:

Erfahrungsgemäß fällt es Schülerinnen und Schüler nicht immer leicht, zwischen einer Beschreibung und einer Erklärung zu unterscheiden. Beim Experimentieren sollte daher betont werden, dass es wichtig ist, zunächst genau zu beobachten und „einfach nur“ zu beschreiben, was man gesehen hat. Falls Schülerinnen und Schüler Beobachtungen mit Erklärungen vermischen, empfiehlt es sich nachzufragen, was genau die Beobachtung war.

Modellexperimente nutzen:

Man kann zur Motivation des Entwerfens eines Modellexperiments einen Vergleich zur Mondlandung ziehen: Die Wissenschaftler konnten den Flug zum Mond natürlich nicht so oft ausprobieren, bis eine Landung endlich geklappt hat. Stattdessen haben sie viele Experimente mit Modellen auf der Erde gemacht (Versuche mit Modellraketen und Modelltriebwerken, Tests von Landemodulen, ...) und die Erkenntnisse dann auf den Flug zum Mond übertragen. Ergebnis: der erste Versuch, Menschen auf dem Mond landen zu lassen, hat sofort geklappt. Das ist auch heute das Ziel: der erste Versuch, das hart gekochte Ei zu erkennen und zu öffnen sollte klappen, da wir sonst einiges aufwischen müssen.

Übertragen des Vorgehens auf eine weitere Frage:

Die Methode, passende Modellexperimente zu finden und daraus Schlüsse zu ziehen, kann nach der Eierfrage auf eine weitere Frage angewendet werden: Bei zwei Konservendosen fehlen die Etiketten. In einer befindet sich eine Frühlingssuppe und in der anderen Hundefutter. Wie kann man herausfinden, in welcher die Suppe ist, und sofort die richtige Dose öffnen?

Versuche und Beobachtungen festhalten (je nach Zeit):

Nach der erfolgreichen Bearbeitung der Fragestellungen sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Versuche und Beobachtungen schriftlich festhalten, evtl. in einem separaten „Laborbuch“. Davor sollten der Zweck von Versuchsdokumentationen und wichtige Kriterien besprochen werden.

Zweck: Andere Forscher müssen anhand der Versuchsbeschreibung den Versuch wiederholen und das Ergebnis überprüfen können.

Kriterien für gute Versuchsdokumentationen:

- Versuch so beschreiben, dass andere ihn ohne weitere Hinweise wiederholen können.
- Oft sind Skizzen oder Zeichnungen zum Versuch hilfreich.
- Alle Beobachtungen genau festhalten.

Die Motivation, eine Dokumentation aufzuschreiben, kann durch das Mitbringen von Fotos von Laborbucheinträgen berühmter Forscher zu ihren berühmten Entdeckungen erhöht werden.

Ergebnis als Zaubertrick vorführen:

Am Stundenende kann je nach Zeit die Frage „Roh oder gekocht“ auch zu einem Zaubertrick ausgebaut werden, den die Schülerinnen und Schüler zuhause vorführen können. Weil zu jedem guten Zaubertrick die Ablenkung vom eigentlich wichtigen gehört, können die Eier gestenreich vor und zurück und im Kreis gerollt werden und irgendwann zwischendurch auch mal in Rotation versetzt werden.

Hinweise zum Unterrichtsverlauf, Experimente, Ergebnisse

Abkürzungen im Unterrichtsverlauf:

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer
 EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit GA ... Gruppenarbeit UG ... Unterrichtsgespräch
 V ... Versuch SuS-V ... Schülerversuch Demo-V ... Demonstrationsversuch

Bemerkungen zu den Inhalten der Stunde:

Die Inhalte der Stunde können an einen Zeitrahmen von 45, 60 oder 90 Minuten angepasst werden. Das Dokumentieren der Experimente und der Beobachtungen wird hier nur für den Fall einer 90-min-Stunde vorgeschlagen und ansonsten erst im nächsten Schuljahr in Mkid aufgegriffen. Besonders bei 45-min-Stunden sollte genügend Zeit zum Auf- und Wegräumen der Materialien eingeplant werden.

Bemerkungen zu den Experimenten:

Führen Sie alle Experimente bei der Vorbereitung rechtzeitig vor der Stunde selbst durch. Probieren Sie auch unterschiedliche Varianten aus. Diese Vorerfahrungen sind für die Stunde sehr wichtig, um das Funktionieren der Experimente sicher zu stellen und damit Sie beim Experimentieren passend reagieren bzw. helfen können.

V 1 (gekochte und rohe Eier rotieren lassen):

Material: je Gruppe ein rohes und ein hart gekochtes Ei (äußerlich identisch), Papier zum Aufwischen (für den Notfall)

Hinweise: An sichere Verwahrung der nicht benutzten Eier auf den Schülertischen denken. Die Schüler darauf hinweisen, dass die Eier nicht vom Tisch fallen dürfen.

V 2 (Modellexperimente „roh oder gekocht“):

Material für V 2 (und V 4):

Plastikeier (z.B. aus Überraschungseiern oder dem Bastelbedarf), Filmdosen (heute meist als Geocachingdosen im Handel), Wasser, Knete, Reis oder Sand, Waagen, Papiertücher, ...

Mögliches Vorgehen:

Plastikei mit Wasser bzw. mit Knete füllen, aber auch andere Lösungen sind denkbar.

Dass man, wenn man die Modell-Eier in **Rotation** versetzt, einen Unterschied beobachten **kann wird vom Lehrer** nach Beginn der Experimentierphase zu einem geeigneten Zeitpunkt **beigesteuert**.

Bemerkungen:

Mehr Material anbieten, als benötigt wird, um das Nachdenken über die (geeigneten) Experimente zu fördern.

Für den Fall, dass Schüler die Idee entwickeln für das gekochte Ei ein Ei mit Eis zu nutzen, kann man, im Vorfeld ein paar wassergefüllte Plastikeier ins Gefrierfach legen.

Mögliche Lösungen:

- Die Schüler beobachten, dass das rotierende Ei mit flüssiger Füllung früher stehen bleibt.
- Wenn man das rotierende Ei mit dem Finger von oben kurz stoppt, setzt sich das mit der Flüssigkeit danach wieder in Bewegung, das mit der festen Füllung nicht. (Dieses Experiment werden die Schüler eher nicht von selbst machen; es kann aber als weiterer Trick vom Lehrer angeregt werden.)

(Für Interessierte Physiker - nicht für die Mkid-Stunde:

Beim rotierenden rohen Ei bleibt ein Teil der Flüssigkeit im Inneren anfangs in Ruhe, während beim hartgekochten Ei zusammen mit der Schale das gesamte feste Innere in Rotation versetzt wird. Daher sind Trägheitsmoment und Drehimpuls der rotierenden Masse beim hartgekochten Ei deutlich größer als beim rohen Ei. Der Drehimpuls der sichtbaren Schale des rohen Eies ist nicht nur kleiner, er wird auch zum Teil durch Reibung auf die Flüssigkeit im Inneren des Eies übertragen. Das erkennt man, wenn man das Ei mit dem Finger kurz anhält und danach wieder loslässt: Ein Ei mit flüssiger Füllung setzt sich danach wieder in Bewegung, da die weiterrotierenden Flüssigkeit wieder Drehimpuls auf die Hülle überträgt. Insgesamt hat beim rohen Ei die Schale ihren Drehimpuls also recht schnell verloren und die Schale rotiert nicht mehr während das hartgekochte Ei noch rotiert.)

Tafel:

Experimente und Modelle

Manche Fragen können wir mit Modellen beantworten, an denen wir Experimente durchführen.

Das Modell (hier z.B. Plastikeier mit Wasser oder Knete) muss in den wichtigen Eigenschaften (hier z.B. flüssige Füllung oder feste Füllung, Ei-ähnliche Form, ...) zum Original passen. Das Modell sollte im Experiment einfach untersucht werden können.

V 3 (Demo-V: Suppendose und Hundefutterdose):

Material:

breites Brett (z.B. 60 cm x 1 m), das eine schiefe Ebene bildet, auf der beide Dosen nebeneinander hinab rollen können – Alternative: schräggestellter Tisch vgl. V 4, Dosen gleicher Größe und möglichst gleicher Masse, die nach entfernen des Etiketts möglichst gleich aussehen mit: Frühlingssuppe (oder andere dünnflüssige Suppe) und Hundefutter (oder Ravioli, fester Linseneintopf oder andere Füllung mit starrer Konsistenz), Dosenöffner



Durchführung:

Beide Dosen gleichzeitig am oberen Ende der schiefen Ebene starten lassen. Je nach Konsistenz der Füllung kommt eine Dose unten mit größerer Geschwindigkeit und früher an. Ein Helfer fängt die Dosen am unteren Ende auf, bevor sie vom Tisch rollen.

Bemerkungen:

Die Schüler experimentieren diesmal nur mit ihren Modellen. Erst zum Schluss wird das Ergebnis an den Dosen des Demo-V durch Öffnen überprüft. Die Schüler dürfen die Dosen diesmal auch nicht in die Hand nehmen sondern nur mit eigenen Modellexperimenten arbeiten. (Durch Schütteln kann man in der Regel den Unterschied hören und die Dosen identifizieren.)

V 4 (SuS-V):

Material:

siehe V 2, verschließbare Plastikdosen, deren Decken nicht übersteht und die gut geradeaus rollen (oder Schnappdeckelgläser, Chemiker fragen, oder Marmeladengläser, deren Deckel nicht überstehen, Bretter

als Rampe für die Konservendosen (ca. 1 m x 50 cm oder ähnliche Bretter aus der Physiksammlung der Schule) – alternativ kann man einen Schülertisch auf der einen Seite auf einen Bücherstapel stellen (mit Papier als Schutz gegen Verschmutzung der Bücher) und direkt daran einen zweiten Tisch stellen

Sicherheitshinweis:

Falls Sie Rollbehälter aus Glas verwenden (z.B. Schnappdeckelgläser oder Marmeladengläser) vor Glasbruch warnen und je Team eine Schülerin/ einen Schüler als zuverlässigen „Abstopper“ benennen.

Lösungsidee:

Einen „Rollbehälter“ mit Wasser befüllen, einen entlang des Randes mit Knete (oder bei größeren Gefäßen mit sichtgepackten nassen Tüchern) füllen, bis beide die gleiche Masse haben. Beide Dosen hangabwärts rollen lassen und unten die Geschwindigkeit vergleichen. Die Dose mit der flüssigen Füllung sollte schneller sein als die andere.

Für Interessierte - nicht für die Mkid-Stunde:

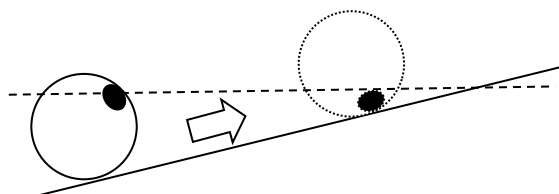
Während bei der rollenden Dose mit flüssiger Füllung nur die Dose, aber nicht die Flüssigkeit rotiert, rotiert bei der Dose mit fester Füllung auch die Füllung selbst. Daher wird ein größerer Teil der anfänglichen Lageenergie in Rotationsenergie umgewandelt und für die Bewegungsenergie der Vorwärtsbewegung bleibt weniger Energie übrig. Also wird die Dose mit fester Füllung unten eine geringere Geschwindigkeit haben.

V 5 (Puffer für schnelle Gruppen, SuS-V):

Material:

siehe V 2; leere Konservendosen; stabiles breites Klebeband; schiefe Ebene aus V 4; geeignete Masse (wie z.B. Massestücke oder viel Knete), die einfach „oben“ im Doseninneren befestigt werden kann.

Lösungsidee:



Alternativ auch als Ergänzung für alle Gruppen geeignet (z.B. bei 90-min-Stunden):

Alle Gruppen sollen nun am Stundenende eine möglichst gute Bergaufdose bauen. Ziel: In einem kleinen Wettbewerb gewinnt die Dose, die am höchsten rollt oder die schnellste.

Dokumentation (je nach Zeit und Wunsch):

Das präzise Dokumentieren von Experimenten ist ein wichtiger Bestandteil der experimentellen Naturwissenschaft. In dieser Mkid-Stunde steht das Dokumentieren von Versuchen aber nicht im Vordergrund und kann weggelassen werden.

Falls Sie das Dokumentieren in der Stunde vornehmen wollen, kann ein kleines und ansprechend gestaltetes Laborbuch manche SuS motivieren, die „Mühen“ des Aufschreibens auf sich zu nehmen. Dazu z.B. 2 Bögen kariertes A4-Papier ohne Rand zu einem A5-Heftchen falten und mit einer Titelseite (evtl. auf farbigem Papier) versehen.

Mögliche Beschriftung in drei Zeilen: Laborbuch; Experimente in Mkid Klasse 6; Name: ... Schuljahr: ...

Laborbuch

Mkid Klasse 6 - Experimente

Name: _____

Klasse: _____ Schuljahr: _____

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit GA ... Gruppenarbeit UG ... Unterrichtsgespräch

FEU ... fragendentwickelnder Unterricht V ... Versuch

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Motivation und Problemstellung ca. 10 min UG SuS-V in GA (2er-Gruppen) UG	L: Was machen Naturwissenschaftler eigentlich? ... L lenkt, falls nötig, Fokus auf das Experimentieren ... L erzählt, dass vor dem Experiment meistens eine Frage steht, die die Forscher beantworten wollen. Roh oder gekocht? L stellt eine solche Frage: Im Kühlschrank sind rohe und gekochte Eier durcheinander gekommen. Wie kann man herausfinden, ob ein Ei roh oder gekocht ist, ohne es zu öffnen? ... Nach Sammlung und Besprechung der SuS-Ideen spendiert der L ggf. einen Trick: Eier rotieren lassen. V 1: SuS erhalten zwei Eier und sollen diese bei der Rotation genau beobachten und beschreiben. SuS beschreiben ihre Beobachtungen	Material: rohe u. hartgekochte Eier
2. Erarbeitung ca. 15 Min. UG SuS-V in GA	L: Wie könnten wir mit Experimenten herausfinden, welches Ei das gekochte und welches das rohe ist? (... u.a. kann auch folgende gute Antwort vorkommen: Ein weiteres Ei kochen und damit vergleichen.) L: Könnte man das auch herausfinden, wenn man keine Eier mehr hat, dafür aber andere Materialien? Ideen sammeln - L: lobt, fragt nach, präzisiert, ... → gefüllte Plastikeier als Modell für die echten Eier V 2: SuS klären „roh oder gekocht“ experimentell L spendet (ggf. frühzeitig) den Tipp, die beiden Modell-Eier in Rotation zu versetzen.	Verweis auf ausliegendes Material: vgl. V 2 nicht nur das Benötigte auslegen, sondern auch weiteres Material.
3. Reflexion und Sicherung ca. 10 Min. UG (45'-Stunde: ggf. Sicherung weglassen)	SuS, L: Ergebnisse besprechen und überprüfen (hartgekochte Eier öffnen); Methode Modellexperiment besprechen L: Welche Eigenschaften der Modelleier müssen zu den echten Eiern passen? Was muss nicht genau wie bei den echten Eiern sein? Tafel: Mit (Modell-)Experimenten Fragen klären	Material: Wischtücher (zur Vorsorge) Tafel / Heft

4. Transfer ca. 15 Min. UG, Demo-V SuS-V in GA UG, Demo-V ca. 5 Min.	Frühlingssuppe oder Hundefutter? L zeigt zwei gleiche Dosen ohne Etikett und behauptet mit geneigtem Brett die Suppendose erkennen zu können. L zeigt Demo-V (V 3) dazu. V 4: SuS-Experimente zur Suppenfrage <i>Puffer (V 5): Eine Dose bauen, die bergauf rollt.</i> Ergebnisse und SuS-Experimente vorstellen und besprechen. Demo-V: L öffnet die „Suppendose“ Materialien von den Schülern aufräumen lassen	Material: vgl. V 3 Material: vgl. V 4 (sowie V 5 für schnelle Gruppen)
5. Ergänzung I ca. 5 Min.	Experiment mit den Eiern als Zaubertrick für zuhause aufbereiten	
6. Ergänzung II 10 ... 30 Min. EA UG SuS-V, UG	L: Forscher halten Versuche im Laborbuch fest. Warum macht man das? Was ist wichtig? SuS: Versuch 1 (und 3) dokumentieren Danach gelungene Beispiele vorstellen, besprechen V 5 nun für alle, Wettbewerb schnellste Bergaufdose	Laborbuch, Fotos Nobelpreisträger SuS-Laborbücher Dokumenten- kamera Material: vgl. V 5

Lehrerblatt

Beim Zusammengeben einer Brausetablette mit Wasser kommt es zu einer Gasentwicklung, weil die in der Brausetablette enthaltenen Stoffe – Natriumhydrogencarbonat (oder andere Carbonate) und Zitronensäure – mit Wasser Kohlenstoffdioxid bilden.

Das bei der Reaktion entstehende gasförmige Kohlenstoffdioxid löst sich sehr gut in Wasser: In 1 l Wasser können sich bei Raumtemperatur 880 ml Kohlenstoffdioxid lösen.



Materialien, die evtl. Vorlauf für das Anschaffen benötigen:

- In den Versuchen werden Wasserwannen benötigt. Dafür kann man transparente Kunststoffboxen im Möbel-, Bau- oder Supermarkt (Höhe ca. 12 cm oder mehr, Grundfläche ca. A4) anschaffen.
- Um das Kohlenstoffdioxid aufzufangen dienen entweder 1 l-Flaschen mit großer Öffnung (Milch- oder Saftflaschen aus dem Supermarkt) oder Sie verwenden 1 l – Standmesszylinder mit einer ebenen und daher vollständig abdeckbaren Oberkante. Letztere sind bei Händlern für Chemieausstattung an Schulen erhältlich. Für Mkid empfiehlt sich die Kunststoffausführung.

Materialliste je Schülergruppe:

- Kunststoffbox (siehe oben)
- 1 l-Flasche mit großer Öffnung und Deckel oder 1 l-Standmesszylinder mit Brettchen o.Ä. zum Abdecken der Öffnung (siehe oben)
- Bei Verwendung einer Flasche: Messbecher zum späteren Abmessen der Gasvolumina
- Bei Verwendung einer Flasche: Tesastreifen und nicht wasserlösliche Folienstifte zum Markieren der Gasvolumina (Erst einen langen Tesastreifen auf die Flasche kleben und nur auf diesem die Wasserstände nach dem Auflösen der einzelnen Tabletten markieren. So bleibt die Flasche selbst unbeschriftet und kann wiederverwendet werden.)
- Brausetabletten in Tablettenröhrchen, z.B. Multivitamin-tabletten
- Becherglas oder Trinkglas
- Teelicht
- Streichhölzer
- Holzstab, z.B. langer Schaschlikstab
- evtl. Trinkglas, Trinkwasser, Zucker oder Salz, Teelöffel (Löslichkeit von Zucker oder Salz)
- Küchenpapier o.Ä. zum Aufwischen bei verschüttetem Wasser

SV 1: Auflösen einer Brausetablette

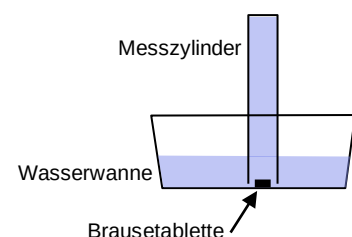
Beobachtungen:

- Starke Gasentwicklung
- Brausetablette wird kleiner und verschwindet schließlich

SV 2: Messen der Gasmengen

Durchführung:

- Damit man das jeweils gebildete Gasvolumen messen kann, fängt man das Gas in einem großen, umgedrehten und mit Wasser gefüllten Messzylinder auf, dessen Öffnung in die Wasserwanne getaucht ist. An dem Messzylinder werden die Gasvolumina nach einer, zwei, ... Tabletten direkt abgelesen.
- Die je Tablette neu hinzugekommene Gasmenge erhält man



durch Differenzbildung.

- Alternativ kann statt des Messzylinders eine Flasche mit großer Öffnung verwendet werden. Dann markiert man die gebildeten Gasvolumina nach einer, zwei, drei, ... Tabletten auf der Flasche. Nach der eigentlichen Messung wird die Flasche bis zu den jeweiligen Markierungen mit Wasser gefüllt, wonach jeweils das Wasservolumen (und somit auch das Gasvolumen) durch Umschütten in einen Messbecher bestimmt wird.

Beobachtungen:

- Bei der ersten Tablette werden trotz der starken Gasentwicklung nur 15 ml Gas aufgefangen. Nach dem Auflösen der zweiten und dritten Tablette stellt man einen verblüffenden Anstieg bei der hinzugekommenen Gasmenge fest. Später kommt je Tablette eine konstante Gasmenge hinzu.
- Ergebnisse einer Beispielmessung:

erste Tablette:	15 ml
zweite Tablette:	50 ml
dritte Tablette:	170 ml
vierte Tablette:	310 ml
fünfte Tablette:	310 ml

Es stellt sich die Frage: „Warum nimmt das zusätzliche Gasvolumen jeweils zu?“

- Das entstehende Gas löst sich sehr gut in Wasser (880 ml pro Liter Wasser, s.o.)
- Bei der ersten Tablette steigt nur die Gasmenge nach oben, die sich nicht so schnell in Wasser lösen kann: im Beispiel ca. 15 ml. Der Rest ($310 \text{ ml} - 15 \text{ ml} = 295 \text{ ml}$) wurde im Wasser gelöst.
- Bei der zweiten Tablette steigt schon ein bisschen mehr Gas auf (hier 50 ml), weil ja schon Kohlenstoffdioxid im Wasser gelöst ist. (Im Wasser zusätzlich gelöst: $260 \text{ ml} = 310 \text{ ml} - 50 \text{ ml}$)
- Bei der dritten Tablette kann noch weniger in Wasser gelöst werden, weil schon ca. 555 ml Kohlenstoffdioxid gelöst sind. Deshalb unterscheidet sich die nun messbare Gasmenge deutlich von den ersten beiden Durchgängen.
- Bei der vierten und fünften Tablette ist die Löslichkeit von Kohlenstoffdioxid in der jetzt noch vorliegenden Wasserportion schließlich erschöpft.

Anmerkung:

Dass der Wert von 880 ml gelöstem Gas nicht erreicht wird, lässt sich dadurch erklären, dass die Wassermenge im Messzylinder von Tablette zu Tablette kleiner wird, weil jedes Mal Wasser aus dem Messzylinder entweicht, wenn weiteres Gas aufgefangen wird.

Mögliche Ergänzung (Demo-Versuch): Lösen von Zucker / Salz in Wasser

Zur Demonstration des Lösens eines Stoffes in Wasser kann während der Erklärung zu SV2 auf das Lösen von Zucker oder Salz in Wasser zurückgegriffen werden. Dazu löst man Zucker oder Salz in einem Glas Trinkwasser.

Hinweise:

- Wenn die Geschmacksprobe (durch eine Schülerin / einen Schüler) vorgenommen werden soll, unbedingt auf Lebensmittelhygiene achten und z.B. nur mit sauberen Küchen-Löffeln umrühren.
- Hier ist auch eine experimentelle Hausaufgabe möglich: Wie viel Zucker kann man in 200 ml Wasser bei Raumtemperatur auflösen? Dabei kann auch jeder selbst die Geschmacksprobe machen.

V 3: Welches Gas hat eine so hohe Löslichkeit in Wasser?

Sicherheitshinweise:

Dieser Versuch kann je nach Zeit als Demonstrationsversuch oder als Schülerversuch durchgeführt werden. Falls Sie den Schülerversuch wählen, weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf den sorgfältigen Umgang mit Streichhölzern und ggf. Kerzen hin: Keine glimmenden Streichhölzer in den Müll werfen, sondern die Streichhölzer vor dem Wegwerfen kurz unter Wasser halten. Kerzenwachs nicht verschütten. Haare nicht in die Kerzenflamme kommen lassen.



Durchführung:

- Die Flasche / der Messzylinder werden unter Wasser mit einem Deckel verschließen, langsam aus dem Wasser nehmen und aufrichten. Da die Dichte von Kohlenstoffdioxid größer als die von Luft ist, bleibt das Kohlenstoffdioxid in der Flasche / im Messzylinder, wenn nun der Deckel wieder entfernt wird.
- Nun wird ein glimmender Holzspan in das Gas gehalten.
- Das entstandene Gas löscht einen brennenden Holzspan, deshalb kommen Gase in Frage, die eine Flamme ersticken, z.B. Stickstoff oder Kohlenstoffdioxid. Mit einer Kalkwasserprobe (Kohlenstoffdioxid trübt Kalkwasser milchig) könnte man das Gas eindeutig identifizieren. Da es sich hierbei aber um eine alkalische Lösung handelt und die Schüler das Gas Stickstoff noch nicht kennen, wird auf diesen Versuch verzichtet und das Erlöschen des brennenden Spans als Nachweis für Kohlenstoffdioxid genommen.

Effektreiche Ergänzung:

- Ein brennendes Teelicht wird in ein Becherglas gestellt. Gießt man nun vorsichtig das Kohlenstoffdioxid aus der Flasche in das Becherglas, erlischt das Teelicht.
Achtung: Es muss genügend Kohlenstoffdioxid vorhanden sein, um das Becherglas deutlich über das Teelicht hinaus mit Kohlenstoffdioxid zu füllen.
- Diese Ergänzung kann ggf. auch als „Zaubertrick“ vorgeführt werden.
(Falls die Schülerinnen und Schüler das zuhause vorführen wollen, verlangen Sie aus Sicherheitsgründen – genauer aus Gründen der Haftung – unbedingt die Anwesenheit der Eltern beim Experimentieren mit Kerzen.)

V 3a: (Demo-Versuch) Im Wasser gelöstes Kohlenstoffdioxid demonstrieren [je nach Zeit/ Wahl]

- Wenn man nachweisen möchte, dass sich Kohlenstoffdioxid tatsächlich in der Wasserportion gelöst hat, muss man dieses Gases wieder aus der Lösung freisetzen. Dies kann man durch Erwärmen der Lösung erreichen, Kohlenstoffdioxid wird freigesetzt (wie z.B. beim Sprudel, der in der Sonne steht...). Zum Nachweis füllt man einen Teil der entstandenen Lösung in ein Reagenzglas (ca. 1/3 voll) und hält das Reagenzglas über ein brennendes Teelicht. Dadurch wird Kohlenstoffdioxid freigesetzt, sammelt sich über der Lösung an und kann hier durch Erlöschen eines brennenden Spans nachgewiesen werden.
- Steht genügend Zeit zur Verfügung (z.B. wenn das Thema auf 2 x 60 min aufgeteilt wird), kann dieser Versuch auch als Schülerversuch durchgeführt werden. In diesem Fall auch hier die Sicherheitshinweise aus Versuch V3 geben und deren Einhaltung überprüfen.

Bemerkung zu den Versuchen V 3a, SV 4 und SV 5:

Diese Versuche ergänzen die ersten Versuche und können je nach Zeit entfallen oder zusammen mit Versuch V 3 in der folgenden Mkid-Stunde behandelt werden.

Versuch V 3a ist etwas anspruchsvoller als die anderen Versuche in dieser Mkid-Einheit.

SV 4: Wie schützt man Brausetabletten im Tablettenröhrchen vor Feuchtigkeit? [je nach Zeit]

Kommen Brausetabletten ungewollt mit Wasser in Berührung kommen, entstehen große Gasmengen, was zur vorzeitigen Reaktion der Brausetabletten und zum Aufspringen der Tablettenröhrchen führt.

Der Deckel des Brausetablettenröhrchens ist deshalb speziell aufgebaut:

- Eine Kunststoffspirale fixiert in der vollen Packung die Tabletten und verhindert, dass die Tabletten zerbrechen.
- Im Innern des Deckels befindet sich Silikagel, auch Kieselgel genannt, das stark hygroskopisch ist und verhindert, dass Wasser, z.B. aus der Luftfeuchtigkeit an die Tabletten gelangt. Schüttelt man den Deckel, kann man das Silikagel, das z.B. auch in kleinen Beutelchen in körniger Form bei neuen Lederwaren verwendet wird, bzw. die körnige Struktur hören.
- Tropft man mit einer Pipette Wasser auf das Silikagel kann man beobachten, dass das Wasser unter Erwärmen sehr schnell „aufgesaugt“ wird. Dadurch wird verhindert, dass Feuchtigkeit an die Brausetabletten gelangt und Kohlenstoffdioxid gebildet wird.

SV 5: Brausetablettenraketen-Wettbewerb [je nach Zeit]

- Die bei der Reaktion von Natriumhydrogencarbonat- (oder Carbonat-) und Zitronensäure-Lösung entstehende große Kohlenstoffdioxidmenge wird in einem Brausetablettenröhrchen dazu genutzt, den Deckel des Röhrchens weit weg zu schießen. Dazu füllen die Schüler ca. 25 ml Wasser in das Röhrchen und stellen sich nebeneinander auf. Zeitgleich werfen Sie eine Brausetablette ins Röhrchen und verschließen es sofort mit dem Deckel. Ohne zu Schütteln dauert es nun ca. 25 s, bis der Druck im Innern so groß ist, dass der Deckel ca. 5 m weit fliegt.
- Bei wem fliegt der Deckel am weitesten?

Didaktischer Kommentar

Mit diesem Experiment sollen die Schüler an **Experimente** aus dem Bereich der Chemie herangeführt werden. Ausgangspunkt ist mit einer Brausetablette ein bekanntes Alltagsprodukt, bei dem sich ein verblüffendes Phänomen beobachten lässt: Löst man nacheinander ein, zwei, drei, ... Brausetabletten in Wasser und fängt dabei das entstehende Gas auf, ist die Gasmenge – anders als man vielleicht erwarten würde – nicht proportional zur Anzahl der Tabletten.

**Wichtige Aspekte in diesem Modul:**

- Genaues Beobachten bei Experimenten
- Präzises und geschicktes Vorgehen beim Experimentieren einüben
- Hypothesengeleitetes Vorgehen beim Experimentieren: Vor dem Experiment sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Vermutungen festhalten
- Ergebnisse und Hypothesen vergleichen und Abweichungen beschreiben
- An einem Beispiel sehen, dass nicht alle Zusammenhänge proportionale Zusammenhänge sind.
- Lösbarkeit von Gasen in Wasser kennen lernen
- An einem Beispiel erfahren, dass ein Gas entgegen einem verbreiteten Präkonzept nicht automatisch „Luft“ oder „Sauerstoff“ ist

Unerwartete Beobachtungen:

Das besondere Etwas in dieser Stunde sind die unerwarteten Gasmengen beim Auflösen mehrerer Brausetabletten hintereinander in der gleichen Flüssigkeit (vgl. SV 2). Durch diesen kognitiven Konflikt wird das Interesse am Phänomen und einer möglichen Erklärung gesteigert.

Hinweise zur Planung der Durchführung von SV 2:

Das eigenständige Planen von Versuchen ist eine anspruchsvolle Aufgabe, die über viele Schuljahre hinweg entwickelt werden muss. Daher würden die Schüler hier vermutlich einige Aspekte übersehen oder sie würden in der Stunde schwer umsetzbare Vorschläge machen.

Darüber hinaus können die Schüler ohne vorherige Kenntnis des Tricks zum Auffangen und Messen des Gases (siehe unten) nicht selbstständig auf die hier eingesetzte Methode kommen.

Daher wird die Planung des Experiments im Wesentlichen vom Lehrer beigesteuert werden. Im Unterrichtsgespräch dazu können die Schüler aber bei einigen Aspekten eingebunden werden: „Was sollte bei Hinzugeben der Braustablette besser nicht passieren?“ „Wie könnt ihr, nachdem ihr die Gasmengen mit Strichen auf der Flasche markiert habt, herausbekommen wie viel ml Gas das sind?“ etc.

Bestimmen der Gasmengen bei den einzelnen Brausetabletten

Wie kann man die unterschiedlichen Gasvolumina nach ein, zwei, drei, ... Brausetabletten bestimmen? Damit das entstehende Gas aufgefangen und anschließend gemessen werden kann, benutzt man einen umgedrehten und mit Wasser gefüllten Messzylinder (bzw. eine Flasche), in dem (bzw. der) das Gas unter Verdrängung von Wasser aufgefangen wird – vgl. die Hinweise zu SV 2 auf dem Lehrerblatt.

Den Schülern ist in der Regel nicht bekannt, dass eine umgedrehte wassergefüllte Flasche, die mit der Öffnung in ein Wasserbecken eingetaucht wird, nicht ausläuft. Daher empfiehlt es sich, dies vor der Planung des Experiments zu demonstrieren und diesen erstaunlichen Effekt ein wenig zu zelebrieren. (Die Ursache, der Luftdruck auf die Wasseroberfläche des Wassers im Becken, ist übrigens im aktuellen Bildungsplan für Baden-Württemberg für die gesamte Schulzeit kein Thema.) Da wir in der Stunde jedoch mit diesem Trick das entstandene Gas auffangen, muss diese Methode vom Lehrer vor Beginn der Versuchsplanung vorgestellt werden.

Sowohl die Durchführung als auch die Auswertung verlangen bei diesem Versuch konzentriertes und geschicktes Arbeiten. Daher sollte auch das Handling zum Lösen einer Tablette und Auffangen des Gases sowie das anschließende Ablesen der Gasmenge (oder bei der Flasche: Markieren der Gasmenge) im Laufe der Versuchsplanung vom Lehrer vorgeführt werden.

Zum Bestimmen der hinzugekommenen Gasmengen hilft es, eine Tabelle anzulegen:

Tablette	1	2	3	4	5
gesamte Gasmenge	15 ml	65 ml	...		
neu hinzugekommene Gasmenge	15 ml	50 ml	...		

Hinweise zur Erklärung des Versuchs SV 2

Die Schülerinnen und Schüler werden ohne Vorkenntnisse aus der Chemie in dieser Stunde i.d.R. selbst keine Erklärung finden können. Diese wird daher in weiten Teilen vom Lehrer geliefert werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten aber die Erklärung ihrem Nebensitzer in eigenen Worten wiedergeben und ggf. bei Unklarheiten beim Lehrer nachfragen.

Für die Erklärung ist es geschickt „rückwärts“ vorzugehen – Strategie: vom Ende her denken. Wenn wir annehmen, dass bei jeder Brausetablette die gleiche Gasmenge entsteht, so wie wir es bei den letzten Tabletten sehen konnten, brauchen wir eine Erklärung, wo das fehlende Gas bei den ersten Tabletten hingegangen ist. Da kein (oder nur sehr wenig) Gas in den Versuchen entwichen ist, kann es eigentlich nur noch im Wasser sein. Man spricht hier von der Löslichkeit des Gases in Wasser.

Je mehr des Gases im Wasser bereits gelöst ist, desto weniger weiteres Gas kann gelöst werden. Ab der vierten (oder fünften) Tablette ist dieser Fall in der Regel erreicht.

Andere Beispiele zur Löslichkeit in Wasser können hier hilfreich sein, z.B. das Lösen von Zucker oder Salz in Wasser. Dass das Wasser nachher süß oder salzig schmeckt „bestätigt“ die Tatsache, dass der Zucker bzw. das Salz sich im Wasser befinden, auch wenn wir das nicht mehr sehen können.

Aufträge für die Schülerexperimente

SV 1: Eine Brausetablette in Wasser

Werfe zunächst eine Brausetablette in ein zur Hälfte mit Wasser gefülltes Glas und schau genau hin. Schreibe anschließend deine *Beobachtungen* auf.



Meine **Beobachtungen**:

Überlege dir weitere Beispiele, bei denen Gasbläschen in einer Flüssigkeit aufsteigen:

SV 2: Eine Brausetablette in Wasser: Auffangen des entstehenden Gases

Im nächsten Experiment sollst du untersuchen, wie viel Gas entsteht, wenn man nacheinander eine, zwei, drei, vier, ... Brausetabletten in Wasser auflöst.

Materialien:

Wasser, Plastikwanne, Glasflasche mit Deckel oder Messzylinder mit Deckel, Braustablette, Messbecher, Klebeband, wasserunlöslicher Stift.

1. Vermutung notieren

Notiere deine Vermutung, wie viel Gas bei der zweiten, dritten, vierten und fünften Brausetablette dazukommen wird.

Tablette ...	1	2	3	4	5	
Gasmenge bei Tablette ...						

Stopp → Beginne mit dem Experimentieren erst nach der gemeinsamen Besprechung zum Vorgehen.

2. Experiment durchführen

Messe nun nach, wie viel Gas bei der ersten, zweiten, dritten, ... Brausetablette entsteht und notiere deine Ergebnisse. Merke dir auch das Vorgehen bei der Durchführung des Versuchs ganz genau.

3. Protokollieren

- Fertige, wie eine Forscherin / ein Forscher, ein Protokoll deines Experimentes an:
Zeichne eine Skizze zum Versuchsaufbau und schreibe genau auf, wie du vorgegangen bist.
Notiere alle deine Beobachtungen und Messwerte.
- Vergleiche deine Versuchsergebnisse mit deiner Vorhersage und halte deinen Vergleich schriftlich fest.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit GA ... Gruppenarbeit UG ... Unterrichtsgespräch

V ... Versuch

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg ca. 5 min UG	L hält eine Brausetablette hoch und fragt, was das ist. L kündigt an, dass die SuS heute experimentell genau untersuchen werden, was passiert, wenn Brausetabletten in Wasser gelangen. L stellt die Bedeutung des sehr genauen Beobachtens in den Naturwissenschaften heraus und gibt organisatorische Hinweise zum ersten Versuch SV 1.	
2. Erarbeitung I ca. 10 min SuS-V in GA kurzes UG	SV 1: SuS bearbeiten den Versuch und beantworten die Fragen. L beobachtet und fragt nach (z.B. zu Details der Beobachtungen). Hinweise: Auf den Unterschied zwischen Erklärung und Beobachtung achten und ggf. die SuS darauf hinweisen. Die zweite Frage dient vor allem als Zeitpuffer für schnelle Gruppen und muss nicht von allen beantwortet werden. Sammeln und Vergleichen der Beobachtungen	Arbeitsblatt, V-Material: vgl. Lehrerblatt
3. Experiment planen ca. 5 min Plenum ca. 5 min EA und Plenum	L stellt vor, dass eine umgedrehte Wasserflasche (bzw. ein gefüllter Messzylinder) nicht ausläuft, wenn die Öffnung in ein Wasserbecken getaucht wird. L zeigt, wie man dieses Phänomen nutzen kann, um das entstehende Gas aufzufangen und zu messen. Gasmenge für die erste Tablette auf dem AB unter 1. notieren SuS notieren Vermutungen für die zweite, dritte, ... Brausetablette; Sammeln der Vermutungen; L gibt weitere Hinweise zur Versuchsdurchführung/ -auswertung.	V-Material: vgl. Lehrerblatt Arbeitsblatt
4. Erarbeitung II ca. 20 min SuS-V in GA	SV 2: SuS führen den Versuch durch und bestimmen mit einer Tabelle die entstandenen Gasmengen SuS räumen Versuchsmaterialien an Ende weg	Material: vgl. Lehrerblatt, Arbeitsblatt
5. Besprechung, Erklärung ca. 15 min UG, Plenum	Beobachtungen sammeln und mit Vermutungen vergleichen Erklärung der Beobachtungen Demo-V: Glimmspan-Probe als Nachweis von Kohlenstoffdioxid	Material: vgl. Lehrerblatt,
[Protokollieren] [10 min], EA	Das Protokoll (Arbeitsblatt, Auftrag 3.) dient bei diesem Einstieg in das Experimentieren als optionale Ergänzung und kann entfallen.	Arbeitsblatt, Heft
6. Vertiefung I ca. 10 min Plenum	Demo-V: Nachweis, des im Wasser gelösten Kohlenstoffdioxids L erläutern den Versuch bei der Vorführung	Material: vgl. Lehrerblatt,
7. Ergänzung I ca. 10 min Plenum, SuS-V in GA	L topft ein wenig Wasser auf eine Tablette und wirft die Frage auf, wie man verhindern kann, dass feuchte Luft die Reaktion startet. SV 4: Silikagel untersuchen	Material: vgl. Lehrerblatt,
6. Ergänzung II ca. 10 min SuS-V in GA	L: Was passiert bei Wasser im Tablettenröhrchen? SV 5: Brausetablettenraketen-Wettbewerb	Material: vgl. Lehrerblatt,

Lehrerblatt

Beim Zusammengeben einer Brausetablette mit Wasser kommt es zu einer Gasentwicklung, weil die in der Brausetablette enthaltenen Stoffe, Natriumhydrogencarbonat (oder andere Carbonate) und Zitronensäure, mit Wasser Kohlenstoffdioxid bilden.

Das bei der Reaktion entstehende Gas Kohlenstoffdioxid löst sich sehr gut in Wasser, in 1 L Wasser können sich 880 ml gasförmiges Kohlenstoffdioxid lösen.



SV 1: Beim Auflösen einer Brausetablette in Wasser lassen sich folgende Phänomene beobachten:

- Starke Gasentwicklung
- Brausetablette wird kleiner und verschwindet schließlich

SV 2: Bei der quantitativen Betrachtung dieser Reaktion kann man beobachten bzw. messen, dass trotz der starken Gasentwicklung bei der ersten Tablette nur 15 ml Wasser verdrängt werden, dass also nur 15 ml Gas im „Gasraum“ messbar sind. Das motiviert, den Versuch zu wiederholen und auch noch mit weiteren Tablette durchzuführen. Dabei kommt es zu der verblüffenden Beobachtung, dass die messbare Gasmenge stark ansteigt. Beispielmessung:

▪	erste Tablette:	15 ml
▪	zweite Tablette:	50 ml
▪	dritte Tablette:	170 ml
▪	vierte Tablette:	310 ml
▪	fünfte Tablette:	310 ml

Es stellt sich deshalb die Frage: „Warum nimmt das messbare Gasvolumen zu?“

- Das entstehende Gas löst sich sehr gut in Wasser (880 ml pro Liter Wasser, s.o.)
- Bei der ersten Tablette steigt nur die Gasmenge nach oben, die sich nicht so schnell in Wasser lösen kann: ca. 15 ml.
- Bei der zweiten Tablette ist das schon ein bisschen mehr, weil ja schon Kohlenstoffdioxid im Wasser gelöst ist, d.h. 50 ml.
- Bei der dritten Tablette ist die Löslichkeit in Wasser noch geringer, weil schon ca. 550 ml Kohlenstoffdioxid gelöst sind. Deshalb unterscheidet sich die nun messbare Gasmenge deutlich von den ersten beiden Durchgängen.
- Bei der vierten und fünften Tablette ist die Löslichkeit von Kohlenstoffdioxid in der jetzt noch vorliegenden Wasserportion schließlich erschöpft.

SV 3: Welches Gas hat eine so hohe Löslichkeit in Wasser?

- Sauerstoff? Kohlenstoffdioxid? Stickstoff?
- Das entstandene Gas löscht einen brennenden Holzspan, deshalb kommen Gase in Frage, die eine Flamme ersticken, z.B. Stickstoff oder Kohlenstoffdioxid. Mit einer Kalkwasserprobe (Kohlenstoffdioxid trübt Kalkwasser milchig) könnte man das Gas eindeutig identifizieren. Da es sich hierbei aber um eine alkalische Lösung handelt und die Schüler das Gas Stickstoff noch nicht kennen, wird auf diesen Versuch verzichtet und das Erlöschen des brennenden Spans als Nachweis genommen.

Nachweis des Kohlenstoffdioxids in der wässrigen Lösung:

- Wenn man nachweisen möchte, dass sich Kohlenstoffdioxid tatsächlich in der Wasserportion gelöst hat, muss man dieses Gases wieder aus der Lösung freisetzen. Dies kann man durch Erwärmen der Lösung erreichen, Kohlenstoffdioxid wird freigesetzt (wie z.B. beim Sprudel, der in der Sonne steht...). Zum Nachweis füllt man einen Teil der entstandenen Lösung in ein Reagenzglas (ca. 1/3 voll) und hält das Reagenzglas über ein brennendes Teelicht. Dadurch wird Kohlenstoffdioxid freigesetzt, reichert sich über der Lösung an und kann hier durch Erlöschen eines brennenden Spans nachgewiesen werden.

SV 4: Anwendung: Kommen die Brausetabletten ungewollt mit Wasser in Berührung kommen, entstehen große Gasmengen, was zur Reaktion der Brausetabletten und zum Entstehen von großen Gasmengen führen würde.

- Der Deckel des Brausetablettenröhrchens ist deshalb speziell aufgebaut:
 - Die Kunststoffspirale fixiert in der vollen Packung die Tabletten und verhindert, dass die Tabletten durch Aneinanderstoßen zerbrechen.
 - Im Innern des Deckels befindet sich Silikagel, auch Kieselgel genannt, das stark hygroskopisch ist und verhindert, dass Wasser, z.B. aus der Luftfeuchtigkeit an die Tabletten gelangt. Schüttelt man den Deckel, kann man das Silikagel, das z.B. auch in kleinen Beutelchen in körniger Form bei neuen Lederwaren verwendet wird, bzw. die körnige Struktur hören.
- Tropft man mit einer Pipette Wasser auf das Silikagel kann man beobachten, dass das Wasser unter Erwärmen sehr schnell „aufgesaugt“ wird. Dadurch wird verhindert, dass Feuchtigkeit an die Brausetabletten gelangt und Kohlenstoffdioxid gebildet wird.

SV 5: Wettbewerb. Brausetablettenrakete

- Die bei der Reaktion von Natriumhydrogencarbonat- (oder Carbonat-) und Zitronensäure-Lösung entstehende große Kohlenstoffdioxidmenge wird in einem Brausetablettenröhrchen dazu genutzt, den Deckel des Röhrchens weit weg zu schießen. Dazu füllen die Schüler ca. 25 ml Wasser in das Röhrchen und stellen sich nebeneinander auf. Zeitgleich werfen Sie eine Brausetablette ins Röhrchen und verschließen es sofort mit dem Deckel. Ohne zu Schütteln dauert es nun ca. 25 s, bis der Druck im Innern so groß ist, dass der Deckel ca. 5 m weit fliegt.

Hinweise:

Die fünf Versuche bauen aufeinander auf und werden sinnvollerweise in zwei aufeinanderfolgenden Doppelstunden durchgeführt: SV1 und 2 in der ersten, SV3-5 in der zweiten Doppelstunde. Die Schüler experimentieren möglichst eigenständig, der fachliche Hintergrund soll mit den Schülern besprochen werden, damit die beiden Fragen nach dem „Wie viel...“ und dem „Was...“ geklärt werden können. Je nach Stundenmodell (45 min, 60 min, 90 min) kann auch eine andere Aufteilung der Experimente vorgenommen oder ein Experiment, z.B. SV 4, weggelassen werden.

Didaktischer Kommentar

Mit diesem Experiment sollen die Schüler an **problemorientiertes Experimentieren** herangeführt werden. Ausgangspunkt ist ein Alltagsprodukt **SV 1**. Dazu dient ein Phänomen, das nicht nur spannend und motivierend ist, sondern die Schüler darüber hinaus verblüfft.



Problemorientierung:

Das zentrale Problem wird durch kognitive Dissonanz erzeugt: Warum führen die vier Brausetabletten zu unterschiedlichen Gasvolumina bzw. warum steigt das beobachtbare bzw. messbare Gasvolumen von Brausetablette zu Brausetablette immer stärker an? **SV 2**

Beispielwerte einer Messung :

- Die erste Brausetablette führt zu 15 ml sichtbarem Gas in der Glasflasche.
- Die zweite Brausetablette bildet 50 ml sichtbares Gas in der Glasflasche.
- Die dritte Tablette schließlich führt zu 170 ml Gas in der Glasflasche.
- Die vierte Brausetablette ergibt weitere 310 ml in der Glasflasche.
- Die fünfte Tablette liefert ebenfalls 310 ml.

Die gleiche Menge würde man bei einer sechsten und siebten Tablette erhalten.

Problemlösungsstrategie: Vom Ende her denken

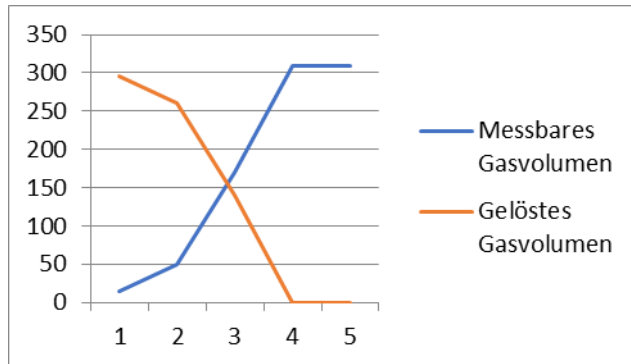
Warum sind bei den ersten vier Brausetabletten unterschiedliche Gasmengen im Zylinder messbar? Hier ist es hilfreich vom Ende her, d.h. vom Versuch mit der vierten bzw. fünften Brausetablette zu denken. Die vierte und fünfte Brausetablette liefern jeweils ca. 300 ml Kohlenstoffdioxid. Die gleiche Menge liefert auch die erste, zweite und dritte. Allerdings wird hier das Gas nicht frei, sondern „verschwindet“. Es erscheint nicht an der Oberfläche, sondern es wird im Wasser „zurückgehalten“. Es bildet sich eine wässrige Lösung. Es gilt nun diesem Phänomen, der enormen und scheinbar unterschiedlichen Löslichkeit von Kohlenstoffdioxid in Wasser auf den Grund zu gehen.

Naturwissenschaftliche Problemlösung durch quantitatives Experimentieren

Wie kann man die unterschiedlichen Gasvolumina zunächst bestimmen? Damit das entstehende Gas aufgefangen und anschließend gemessen werden kann, benutzt man ein mit Wasser gefülltes Gefäß, in dem das Gas pneumatisch, d.h. unter Verdrängung von Wasser aufgefangen wird. Damit man das jeweils gebildete Volumen messen kann, fängt man es entweder in einem großen, umgedrehten und mit Wasser gefüllten Messzylinder auf, in dem man die Gasvolumina direkt ablesen kann. Alternativ kann man die gebildeten Gasvolumina auf einer Flasche markieren, indem man jeweils die Wasserfrontlinie mit einem wasserunlöslichen Stift nachzeichnet und anschließend durch Auffüllen von Wasser aus einem Messbecher das gebildete Gasvolumen bestimmt. Die zentrale Aufgabe der Schüler ist das genaue Beobachten und das anschließende Protokollieren. Hier gehen sie, wie im Fach NT erlernt vor: Fragestellung, Versuchsaufbau und Durchführung, Beobachtungen und eine Erklärung.

	Messbares Gasvolumen		Gelöstes Gasvolumen
Tablette 1	15 ml	$310 \text{ ml} - 15 \text{ ml} =$	295 ml
Tablette 2	50 ml	$310 \text{ ml} - 50 \text{ ml} =$	260 ml
Tablette 3	170 ml	$310 \text{ ml} - 170 \text{ ml} =$	140 ml
Tablette 4	310 ml	$310 \text{ ml} - 310 \text{ ml} =$	0 ml
Tablette 5	310 ml	$310 \text{ ml} - 310 \text{ ml} =$	0 ml
Summe			695 ml

Ab der vierten Tablette ist die maximale Löslichkeit von Kohlenstoffdioxid in Wasser erreicht, d.h. ab diesem Zeitpunkt wird kein Kohlenstoffdioxid mehr in Wasser gelöst und das gesamte gebildete Kohlenstoffdioxid erscheint im darüberliegenden Gasraum. Verdeutlicht bzw. visualisiert kann die gebildete Gasmenge auch durch eine grafische Darstellung:



Anmerkung:

Dass der Idealwert von 880 ml nicht erreicht wird, lässt sich leicht dadurch erklären, dass die Wassermenge im Glaszylinder von Tablette zu Tablette kleiner wird.

Naturwissenschaftlich von Bedeutung ist auch, um welches Gas es sich handelt, deshalb wird das Gas mit einer Nachweisreaktion identifiziert. [SV 3](#)

Anwendung des Phänomens:

Die Entstehung von großen Mengen Kohlenstoffdioxid bei der Reaktion von Carbonaten und Zitronensäure bei Kontakt mit Wasser kann im Alltag zum Problem werden. Deshalb ist im Deckel ein Trockenmittel, d.h. die noch stärkere Affinität des Silikagels verhindert, dass Wasser und die Brausetablette in Kontakt kommen. Auch diese Hypothese wird untersucht, indem sie experimentell überprüft wird. [SV 4](#)

Was würde passieren, wenn eine Brausetablette im Röhrchen in Kontakt mit Wasser kommen würde. Dies wird mithilfe eines Experimentes überprüft. [SV 5](#)

Die bei der Reaktion entstehenden 310 ml Gas führen dazu, dass im Röhrchen ein enormer Überdruck entsteht und irgendwann der Deckel weit weg fliegt.

D.h. das erworbene Wissen wird dazu genutzt, ein für die Schüler dieser Altersgruppe motivierendes aber ungefährliches Experiment durchzuführen, das auch leicht zuhause wiederholt werden kann: die Brausetablettenrakete.

Der Motivationsgrad kann dadurch noch erhöht werden, dass das Experiment als Wettbewerb durchgeführt wird.

Materialliste

- Becherglas oder Trinkglas ca. 200 ml
- Kunststoffbox: z.B. Universalbox von TEDI mit Klappdeckel und Griff (30,5 x 20 cm)
- Glasflasche 1l mit großer Öffnung und Deckel, z.B. Milchflasche
- Kleiner Messbecher
- Teelicht
- Streichhölzer
- Holzstab, z.B. langer Schaschlikstab
- Wasserunlöslicher, schwarzer Stift, z.B. Eding
- Brausetabletten, z.B. Multivitamin-tabletten
- Pipette
- Natron, z.B. von Dr. Oetker
- Zitronensäure, z.B. von Dr. Oetker



Teil 1

Sicher hast du schon einmal eine Brausetablette ins Wasser geworfen. Aber hast du auch genau hingeschaut? Im folgenden Experiment sollen die Phänomene, die beim Zusammentreffen von Wasser und einer Brausetablette ablaufen, von dir genauer erforscht werden:

SV 1: Eine Brausetablette in Wasser...

Werfe zunächst einmal eine Brausetablette in ein zur Hälfte mit Wasser gefülltes Glas und schau genau hin. Schreibe anschließend deine *Beobachtungen* auf:

Meine **Beobachtungen**:

Überlege dir **zwei Fragen**, die man mit Hilfe von weiteren Experimenten beantworten kann.

1.

2.

SV 2: Eine Brausetablette in Wasser...Auffangen des entstehenden Gases

Entwickle mit den folgenden Materialien ein **Experiment**, mit dem man das entstehende Gas ohne Kontakt und damit Vermischung mit der Luft auffangen kann und führe es nach diesem Plan durch.

- **Materialien**, die dir zur Verfügung stehen:
Plastikwanne, Glasflasche mit Deckel, Braustablette, Messbecher, wasserunlöslicher Stift.
- **Konkreter Forschungsauftrag**: Erforsche die Menge des entstehenden Stoffes. Führe dazu dieses Experiment so lange durch, bis die erhalten Werte gleichbleiben. Wie in einem Forschungslabor musst du genau notieren, wie du vorgegangen bist und was du beobachten konntest. Überlege dir, warum sich die vier Brausetabletten so unterschiedlich verhalten.
- **Protokoll**: Fertige nun, wie ein Forscher, ein Protokoll deines Experimentes an: Zeichne dazu 1. eine *Skizze des Versuchsaufbaus*. Schreibe als 2. auf, wie du vorgegangen bist und notiere dazu die einzelnen Versuchsschritte deines Forschungsauftrags (*Versuchsdurchführung*). Schreibe als 3. die *Beobachtungen* auf, vergleiche sie mit SV 1. Finde 4. eine *Erklärung* für die beobachteten Phänomene.

Teil 2SV 3: Eine Brausetablette in Wasser...Nachweis des entstehenden Gases

Wir wissen nun, wie viel Gas entsteht, aber noch nicht, um welches Gas es sich handelt. Das sollst du mit Hilfe eines Experimentes herausfinden.



- **Materialien:** Becherglas, Brausetablette, Reagenzglas mit Reagenzglashalter, Teelicht, Streichholz, Holzstab, Unterlage oder flacher Teller.
- **Durchführung:** Weise nach, dass das Gas im Wasser gelöst wurde und finde heraus, um welches Gas es sich handelt.
- **Protokoll:** Notiere auch hier den *Versuchsaufbau*, die *Durchführung* und die *Erklärungen*.

SV 4: Eine Brausetablette in Wasser...Der unbekannte Stoff im Deckel

Hast du dir schon einmal den Deckel eines Brausetablettenröhrchens genauer angeschaut? Finde heraus, welche Funktion der weiße Feststoff im Innern des Deckels übernimmt.



- **Planung:** Überlege dir ein Experiment, mit dem du diese Funktion testen kannst.
- **Untersuchung:** *Führe den Versuch durch* und halte deine *Beobachtungen* und *Erklärungen* fest.

SV 5: Eine Brausetablette in Wasser...wird zur Rakete!

Du hast festgestellt, dass bei der Reaktion einer Brausetablette mit Wasser große Gasmengen entstehen. Doch was passiert, wenn dieses Gas nicht an die Umgebung abgegeben, sondern in einem geschlossenen Gefäß gesammelt wird?

- **Materialien:** Leeres Brausetablettenröhrchen mit Deckel, 25 ml Wasser, 1 Brausetablette, Maßband.
- **Testphase als Wettbewerb:**
In einem leeren Brausetablettenröhrchen wird eine Brausetablette mit ca. 25 ml Wasser versetzt. 3-4 Schüler stellen sich nebeneinander in einer Startlinie auf. Zeitgleich geben alle eine Brausetablette in das Röhrchen und verschließen es mit dem Deckel. Das Röhrchen wird mit dem Deckel voran schräg in Wurfrichtung gedreht.
Derjenige, dessen Deckel am weitesten fliegt, gewinnt.

Deutung: Finde eine *Erklärung* für das „Brausetablettenraketenphänomen“.

Verlaufsplan Teil 1 und 2

Zeit	Unterrichtsphase	Inhalt (Was?)	Methoden und L/S-Aktivitäten (wie und wer?)	Experimente/ Medien (wodurch?)	Komp. FEKB
Phänomen Brausetablette Teil 1					
	Einstieg: Problemgrund Spannung	Brausetablette wird in Becherglas gegeben, eine starke Gasentwicklung ist zu beobachten, die Tablette wird nach und nach kleiner, bis sie völlig verschwunden ist.	Schüler führen eigenständig das Experiment durch und beobachten.	SV 1: Auflösen einer Brausetablette	E, K
	Hinführung zur Problemstellung: Problemerkfassung Problem- bewusstsein Motivation	Wie viel Gas entsteht? - Planung des Schülerexperimentes - Durchführung des Schülerexperimentes - Dokumentation des Schülerexperimentes	Um dies herauszufinden, muss ein Experiment entwickelt werden, mit dem das entstehende Gas aufgefangen wird (SuS). Nacheinander werden 4 Brausetabletten unter der mit Wasser gefüllten Milchflasche platziert. Mit einem Stift wird an der Glasflasche die jeweils sichtbare Gasmenge markiert (SuS): Kognitive Dissonanz Versuchsaufbau, Durchführung und Beobachtungen werden notiert (SuS).	SV 2: Aus Materialienliste Versuchsaufbau entwickeln und Experiment vier Mal hintereinander durchführen. Schülerprotokoll von SV 2.	
	Problemstellung Zielvereinbarung	Warum sind bei den vier Brausetabletten unterschiedliche Gasmengen messbar?			
	Problemanalyse Hypothesen	Hypothesen: Bei der ersten und zweiten Tablette „verschwindet“ ein Teil des Gases im Wasser: Es entsteht eine Lösung, ein homogenes Gemisch aus Gas und Wasser. Bei der dritten Tablette löst sich nur noch wenig, bei der vierten und fünften Tablette löst sich kein Gas mehr im Wasser.	LSG: Schüler diskutieren und überlegen sich eine Erklärung, Lehrer gibt evtl. Impulse. Rückgriff auf das Fach BNT, UE Wasser, Gemische, wässrige Lösungen	Evtl. Notizen an der Tafel	
Mögliches Ende von Teil 1					

Phänomen Brausetablette Teil 2					
	Überprüfung	Überprüfung, ob sich das entstandene Gas tatsächlich in Wasser gelöst hat. In diesem Fall müsste es bei Erwärmung der wässrigen Lösung wieder freigesetzt werden.	Schüler halten in einem Reagenzglas eine kleine Wasserportion in ein Becherglas mit heißem Wasser oder über ein brennendes Teelicht und weisen das freiwerdende Gas durch Erlöschen eines brennenden Spans nach.	SV 3: Freisetzen von Kohlenstoffdioxid aus der wässrigen Lösung mit anschließendem Nachweis	
	Ergebnisse	Kohlenstoffdioxid löst sich sehr gut in Wasser: 880ml in 1 l Wasser. Eine Brausetablette produziert ca. 300 - 400 ml			
	Wissenssicherung	Zusammenfassung, Ergebnissicherung	Schüler halten die Ergebnisse fest.	Fertigstellung des Protokolls	
	Anwendung	Warum ist im Deckel des Brausetablettenröhrchens ein weißer Feststoff enthalten?	Schüler untersuchen den Deckel des Brausetablettenröhrchens und versuchen eine Deutung zu finden, z.B. sie geben mit einer Pipette Wasser auf den Inhalt des Deckels und beobachten, wie dieses aufgesaugt wird ...	SV 4: Untersuchung des Deckels des Brausetablettenröhrchens	
	Ausstieg	Zur Deutung planen sie ein Experiment und führen sie es durch (SV 4). Brausetablettenrakete: 3-4 Schüler treten gegeneinander an und versuchen den Deckel des Brausetablettenröhrchens möglichst weit fliegen zu lassen (SV 5).	Schüler füllen in das Brausetablettenröhrchen ca. 1 cm hoch Wasser. 3-4 Schüler und geben zeitgleich eine Brausetablette dazu und verschließen das Röhrchen mit einem Deckel.	SV 5: Wettbewerb	

Hinweise:

Die 5 Schülerversuche werden sinnvollerweise in dieser Reihenfolge durchgeführt. Vorgeschlagen wird, die Experimente in zwei Etappen durchzuführen, die Unterteilung kann individuell, je nach Umfang der Mkid-Zeit angepasst werden.

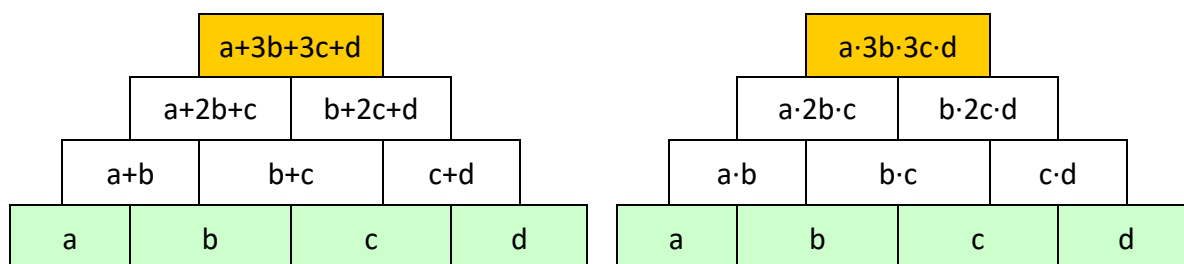
Lehrerblatt

Mit Hilfe der beiden Schülerarbeitsblätter „Rechenmauern“ und „Verflixte Vier“ soll das **Kopfrechnen** geübt werden. Auch die Regel „Punkt vor Strich“ und die Klammersetzung werden thematisiert.

Rechenmauern:

Die Schülerinnen und Schüler füllen nach Anweisung („Plus“ – linke Spalte bzw. „Mal“ – rechte Spalte) die Rechenmauern aus. Zur Selbstkontrolle sind die Ergebnisse in der Spitze angegeben.

Die Lehrperson kann, bei ggf. eingeschränkten Vorkenntnissen der Schüler, unter Verwendung des „Leerformulars“ auch eigene Rechenmauern-Aufgaben erstellen, z.B. ausschließlich im Bereich der natürlichen Zahlen. Im Fall „Mal“ sollten die vier Startzahlen dann im kleinen einstelligen Bereich sein. Das Vorkommen der Zahlen 2 und 5 erleichtert die Rechnung dabei.



Eine Problemöglichkeit hierbei ist – die Zahl an der Spitze (orange) lässt sich aus den Zahlen der Basis (grün) direkt berechnen (vgl. Abbildungen):

- für den Fall „Plus“ mit $a + 3b + 3c + d$

- für den Fall „Mal“, mit $a \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot d$

Weiterführung der Arbeit mit Rechenmauern:

Insbesondere beim Fall „Plus“ können die Schüler sich eine Zahl wünschen, die an der Spitze stehen soll sowie drei der vier Zahlen der Basis und die Lehrperson kann die vierte Zahl dazu bestimmen und die Schüler die Rechenmauern dann ausfüllen.

Vielleicht können die Schülerinnen und Schüler sogar den „Trick“ der Lehrkraft herausfinden.

Verflixte Vier:

Die Lehrperson geht zunächst mit den SuS die Bedingungen und die Beispiele durch, beantwortet ggf. Fragen und (das ist ganz wichtig!) betont, dass es sich hier um **eine ganz ganz schwierige**

Aufgabenstellung handelt, an der viele Erwachsene scheitern.

Wenn alle SuS wissen, was zu tun ist, füllen sie dann in Einzel- oder Partnerarbeit die Tabelle aus. Zu allen Zahlen zwischen 1 und 9 existieren Lösungen, oftmals mehrere (vgl. Lösungsblatt).

Zahlterme mit gemischten Punktverknüpfungen wie z.B. $4 \cdot 4 : 4$ werden üblicherweise von links nach rechts abgearbeitet, wie im Falle der gemischten Strichverknüpfungen z.B. bei $10 - 5 + 3$. Damit sind weitere Lösungen sogar ohne Klammersetzungen möglich, z.B. $1 = 4 \cdot 4 : 4 : 4$.

Die Lehrperson sollte – Selbsterfahrung ist ganz wichtig – auf jeden Fall zuerst selbst probieren.

Diese Aufgabe ist selbstdifferenzierend. Wenn ein Schüler für mehr als zwei der Zahlen von 1 bis 9 eine Lösung findet, ist das schon mehr als gut 😊.

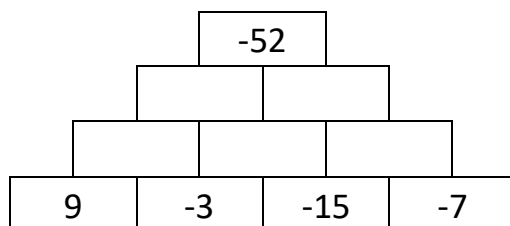
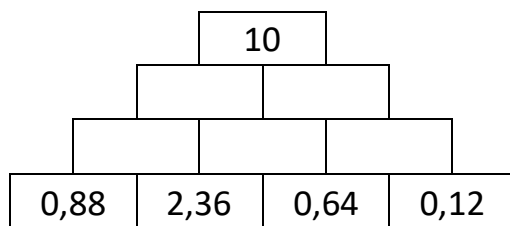
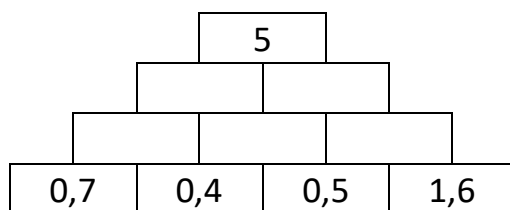
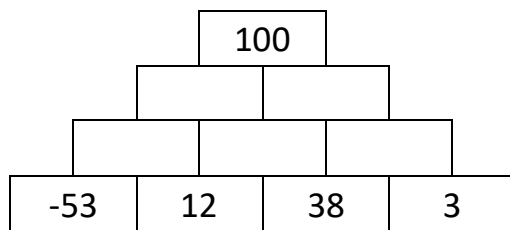
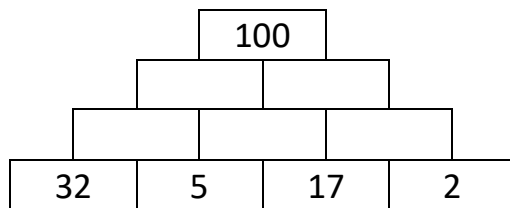
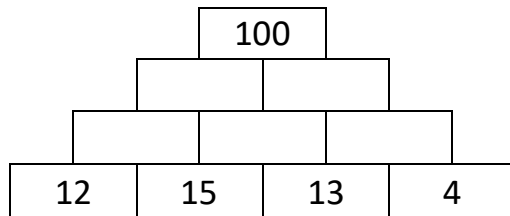
Die Schüler können sich gegenseitig selbst kontrollieren.

Varianten beim Vorgehen:

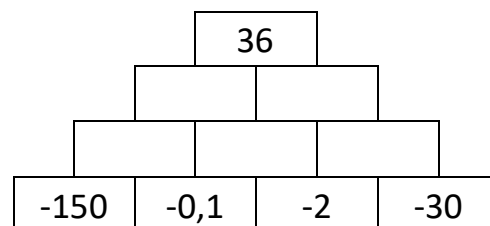
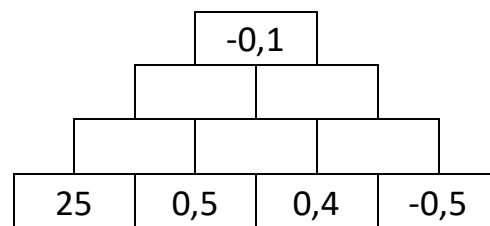
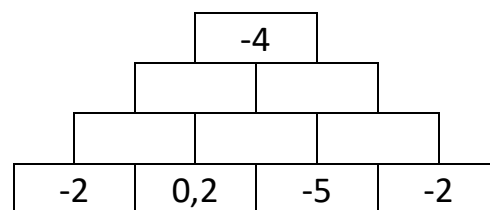
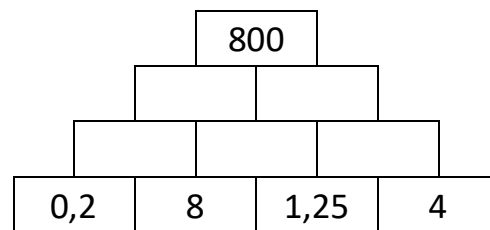
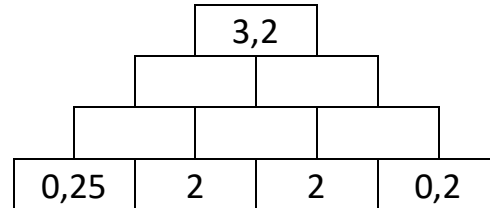
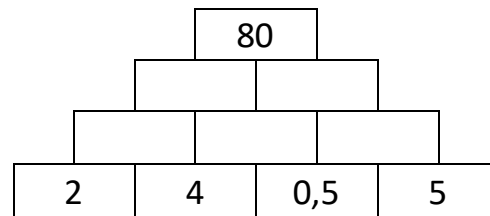
- Man kann auch Alternativlösungen zu einer Zahl in die Zählung der Lösungen einbeziehen.
- Möglich wäre auch, dass die Lerngruppe sich die Aufgabe stellt „Wie viele Lösungen finden wir gemeinsam?“ und man die gefundenen Lösungen an der Tafel zusammenträgt.
- Die Lehrkraft kann Tipps geben: „Verwende $4 : 4$ “; „Verwende die Form $(\dots\dots\dots) : 4$ “.

Rechenmauern

Über zwei Zahlen steht immer deren Summe
(„Plus“)

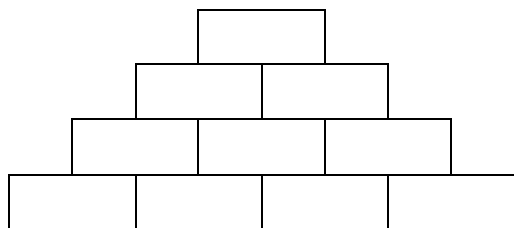
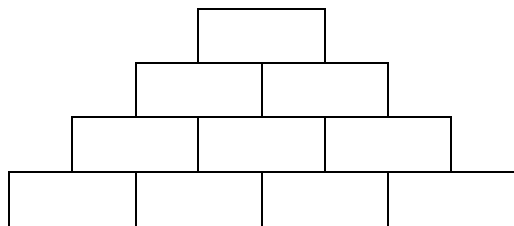
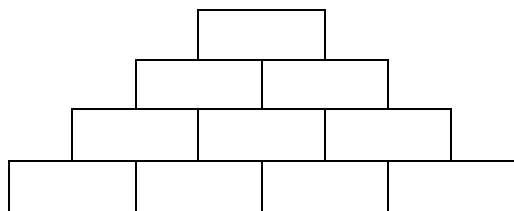
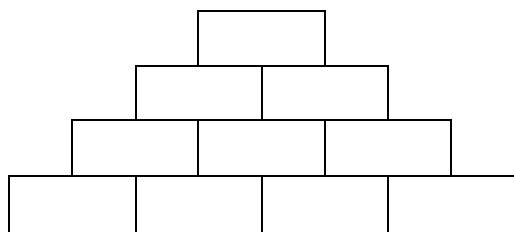
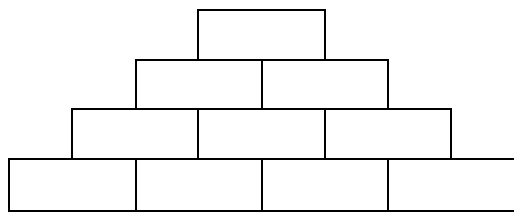
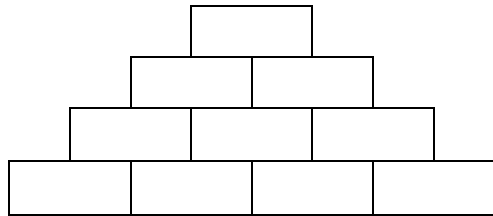


Über zwei Zahlen steht immer deren Produkt
(„Mal“)

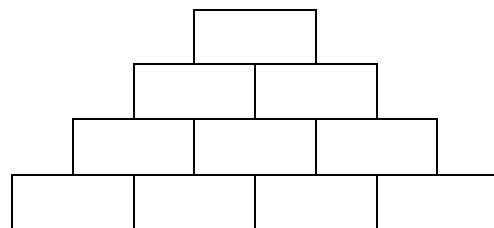
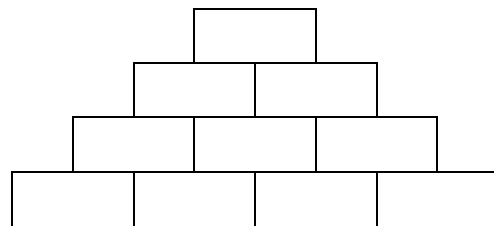
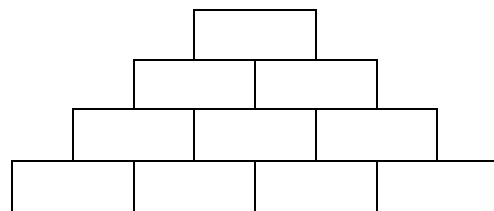
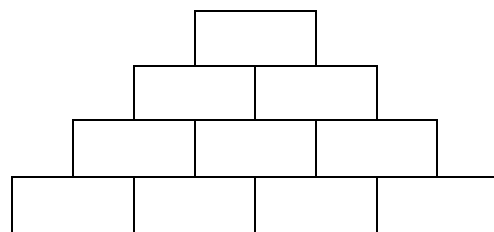
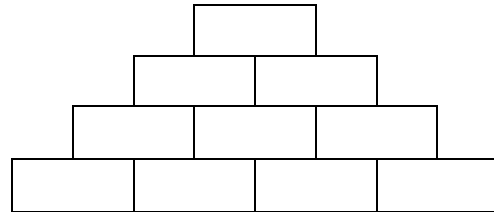
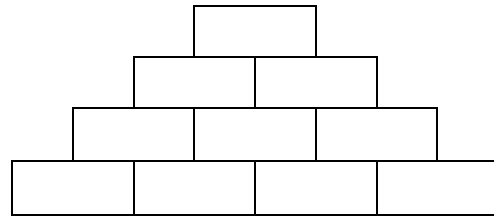


Rechenmauern

Über zwei Zahlen steht immer deren Summe
(„Plus“)



Über zwei Zahlen steht immer deren Produkt
(„Mal“)



Rechenmauern – Lösungen

Über zwei Zahlen steht immer deren Summe
(„Plus“)

100			
55		45	
27		28	17
12	15	13	4

100			
59		41	
37		22	19
32	5	17	2

100			
9		91	
-41		50	41
-53	12	38	3

5			
2		3	
1,1		0,9	2,1
0,7	0,4	0,5	1,6

10			
6,24		3,76	
3,24		3	0,7
0,88	2,36	0,64	0,12

-52			
-12		-40	
6		-18	-22
9	-3	-15	-7

Über zwei Zahlen steht immer deren Produkt
(„Mal“)

80			
16		5	
8		2	2,5
2	4	0,5	5

3,2			
2		1,6	
0,5		4	0,4
0,25	2	2	0,2

800			
16		50	
1,6		10	5
0,2	8	1,25	4

-4			
0,4		-10	
-0,4		-1	10
-2	0,2	-5	-2

-0,1			
2,5		-0,04	
12,5		0,2	-0,2
25	0,5	0,4	-0,5

36			
3		12	
15		0,2	60
-150	-0,1	-2	-30

Verflixte Vier

Du sollst möglichst viele Zahlen von 1 bis 9 als Rechenausdruck aufschreiben.

Aber Achtung:

- du musst genau viermal die Ziffer 4 verwenden, nicht mehr und nicht weniger als viermal
- andere Ziffern als 4 dürfen nicht vorkommen
- du hast freie Auswahl bei den Rechenzeichen $+$ $-$ $\cdot$ und $:$
- es gilt wie immer „Punkt vor Strich“, aber du darfst Klammern setzen

Vier **Beispiele** für Zahlen, die größer als 9 sind:

- $12 = (4 - 4 : 4) \cdot 4 = (4 - 1) \cdot 4 = 3 \cdot 4$
- $15 = 4 \cdot 4 - 4 : 4 = 16 - 1$
- $16 = 4 + 4 + 4 + 4$
- $24 = 4 \cdot 4 + 4 + 4 = 16 + 4 + 4$

1 =
2 =
3 =
4 =
5 =
6 =
7 =
8 =
9 =

Für wie viele Zahlen hast du einen Rechenausdruck gefunden?

2 = gut | 3 = sehr gut | 4 = hervorragend | 5 = Spitze | mehr als 5 ist eigentlich nicht zu schaffen 😊

Verflixte Vier - Lösungen

Du sollst möglichst viele Zahlen von 1 bis 9 als Rechenausdruck aufschreiben.

Aber Achtung:

- du musst genau viermal die Ziffer 4 verwenden, nicht mehr und nicht weniger als viermal
- andere Ziffern als 4 dürfen nicht vorkommen
- du hast freie Auswahl bei den Rechenzeichen + – · und :
- es gilt wie immer „Punkt vor Strich“, aber du darfst Klammern setzen

Vier **Beispiele** für Zahlen, die größer als 9 sind:

- $12 = (4 - 4 : 4) \cdot 4 = (4 - 1) \cdot 4 = 3 \cdot 4$
- $15 = 4 \cdot 4 - 4 : 4 = 16 - 1$
- $16 = 4 + 4 + 4 + 4$
- $24 = 4 \cdot 4 + 4 + 4 = 16 + 4 + 4$

$1 = 4 : 4 + 4 - 4$ oder $1 = (4 + 4 - 4) : 4$
$2 = 4 : 4 + 4 : 4$ oder $2 = 4 - (4 + 4) : 4$
$3 = (4 + 4 + 4) : 4$ oder $3 = (4 \cdot 4 - 4) : 4$
$4 = 4 + 4 \cdot (4 - 4)$ oder $4 = 4 + (4 - 4) : 4$
$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = 4 + (4 + 4) : 4$
$7 = 4 + 4 - 4 : 4$ (oder $7 = 44 : 4 - 4$)
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$ oder $8 = 4 \cdot 4 - 4 - 4$ oder $8 = 4 + 4 \cdot (4 : 4)$
$9 = 4 + 4 + 4 : 4$

Für wie viele Zahlen hast du einen Rechenausdruck gefunden?

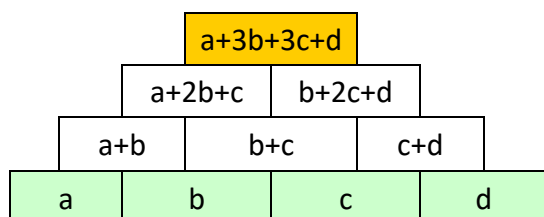
2 = gut | 3 = sehr gut | 4 = hervorragend | 5 = Spitze | mehr als 5 ist eigentlich nicht zu schaffen 😊

Lehrerblatt

Mit Hilfe der beiden Schülerarbeitsblätter „Rechenmauern“ und „Verflixte Vier“ soll das **Kopfrechnen** geübt werden.

Rechenmauern:

Die Schülerinnen und Schüler füllen nach Anweisung („Plus“ – linke Spalte bzw. „Mal“ – rechte Spalte) die Rechenmauern aus. Zur Selbstkontrolle sind die Ergebnisse in der Spitze angegeben.



Die Lehrperson kann unter Verwendung des „Leerformulars“ auch eigene Rechenmauern-Aufgaben erstellen. Eine Problemöglichkeit hierbei ist: Die Zahl an der Spitze (orange) lässt sich aus den Zahlen der Basis (grün) direkt berechnen – vgl. Abbildung links für den Fall „Plus“, entsprechend $a \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot d$ für den Fall „Mal“.

Weiterführung der Arbeit mit Rechenmauern: Insbesondere beim Fall „Plus“ können die Schüler sich eine Zahl wünschen, die an der Spitze stehen soll sowie drei der vier Zahlen der Basis und die Lehrperson kann die vierte Zahl dazu bestimmen und die Schüler die Rechenmauern dann ausfüllen. Vielleicht können die Schülerinnen und Schüler sogar den „Trick“ der Lehrkraft herausfinden.

Verflixte Vier:

Die Schülerinnen und Schüler füllen wie beschrieben die Tabelle aus. Zu allen Zahlen zwischen 1 und 30 existieren Lösungen (vgl. Lösungsblatt – die Lehrperson sollte auf jeden Fall zuerst selbst probieren!), oftmals mehrere. Außer 4! kommen keine anderen Fakultäten vor. Außer $\sqrt{4}$ kommen keine anderen Wurzeln vor.

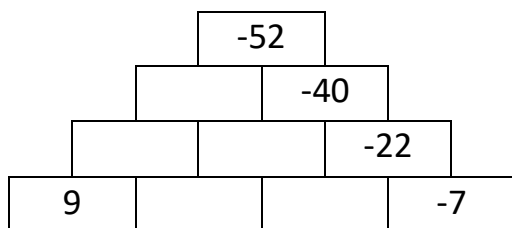
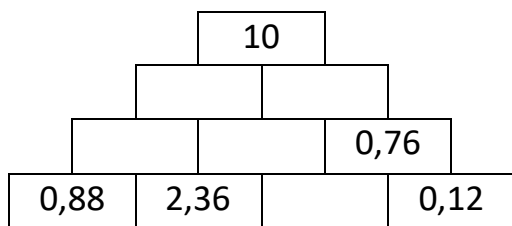
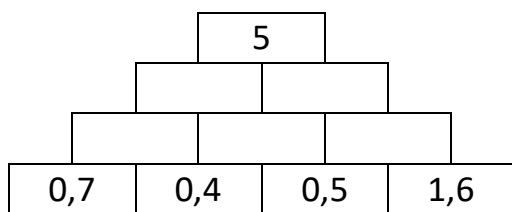
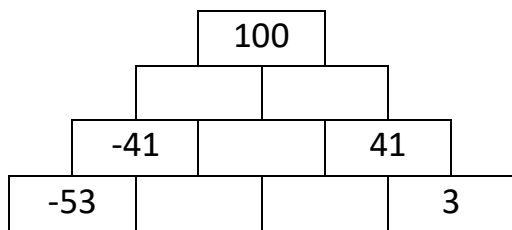
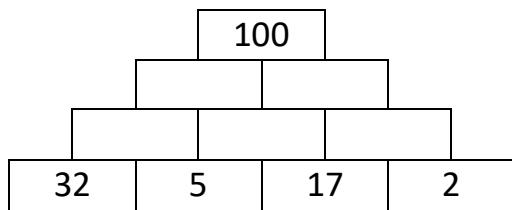
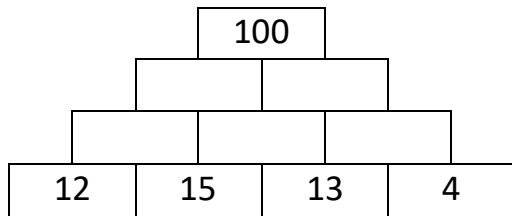
Diese Aufgabe ist selbstdifferenzierend. Es ist nicht daran gedacht, dass ein Schüler alle Lösungen findet, manche Rechenausdrücke sind etwas „verzwickelt“.

Eine Strategie könnte durchaus sein, mit den vier Vierern und Rechenzeichen einfach einmal „drauflos“ zu kombinieren und so schon etliche Rechenausdrücke für die Zahlen zwischen 1 und 30 zu finden.

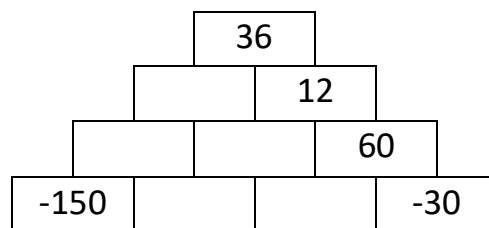
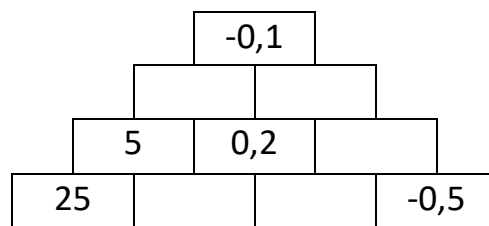
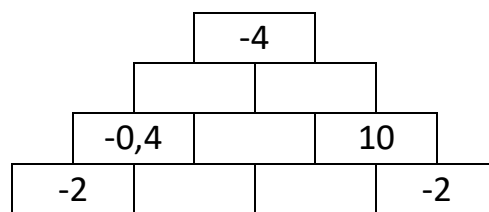
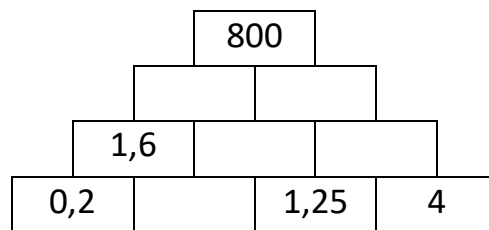
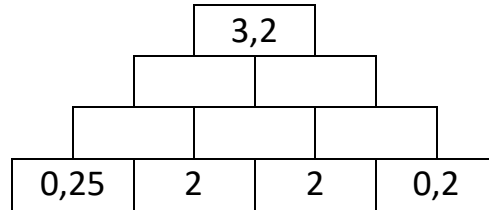
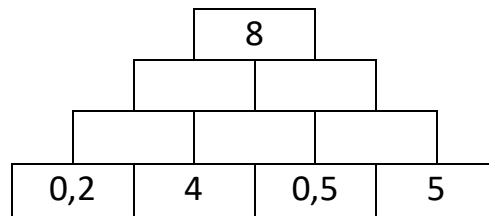
Die Schüler können sich gegenseitig selbst kontrollieren.

Rechenmauern

Über zwei Zahlen steht immer deren Summe
(„Plus“)

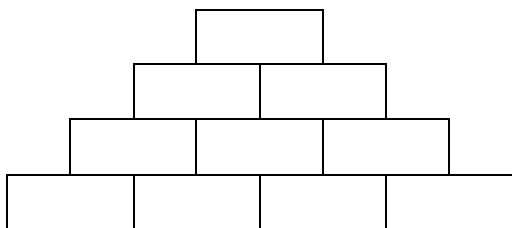
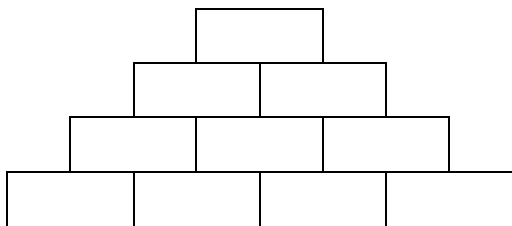
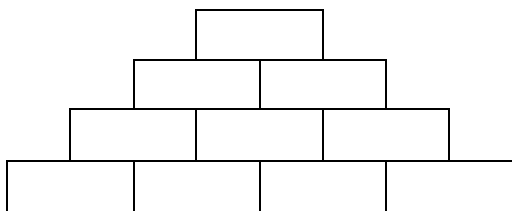
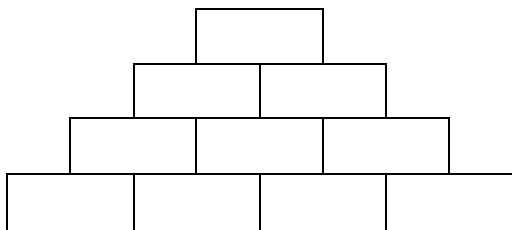
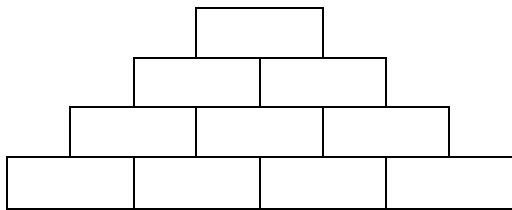
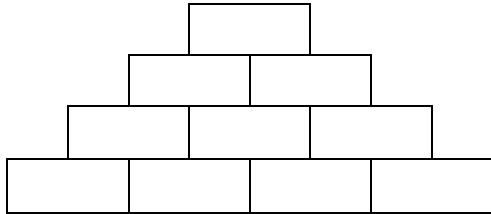


Über zwei Zahlen steht immer deren Produkt
(„Mal“)

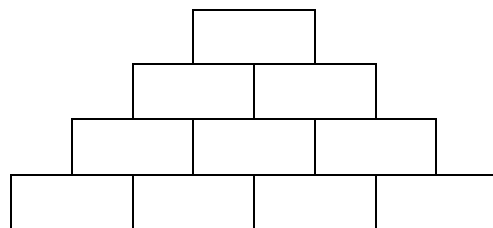
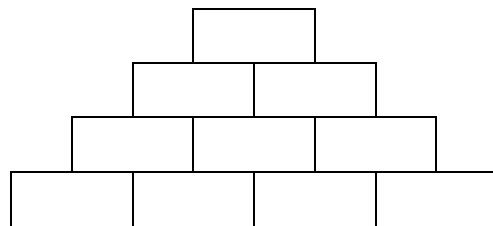
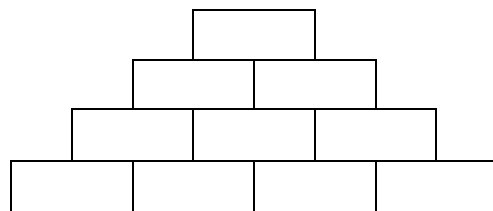
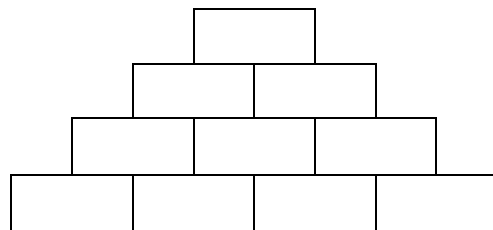
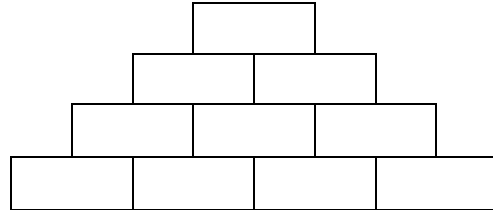
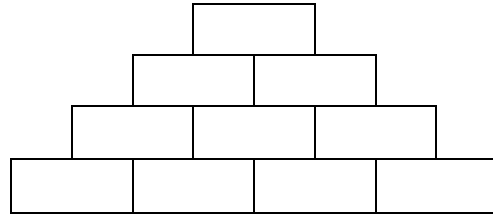


Rechenmauern

Über zwei Zahlen steht immer deren Summe
(„Plus“)



Über zwei Zahlen steht immer deren Produkt
(„Mal“)



Verflixte Vier

Du sollst möglichst viele Zahlen von 1 bis 30 als Rechenausdruck nur mithilfe der Ziffer 4 aufschreiben.
Aber Achtung:

- du musst genau viermal die Ziffer 4 verwenden, nicht mehr und nicht weniger
- du hast freie Auswahl bei den Rechenzeichen $+$ $-$ $\cdot$ und $:$
- du darfst so viele Klammern verwenden wie du möchtest
- du darfst $\sqrt{4}$ („Wurzel aus vier“) verwenden, das kennst du noch nicht:
 $\sqrt{4}$ ist die positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt, also ist $\sqrt{4} = 2$
- du darfst $4!$ („vier Fakultät“) verwenden, das kennst du noch nicht:
 $4!$ bedeutet $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, also ist $4! = 24$.

Beispiele:

- einfach: $32 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 16 + 16$
- schwieriger: $34 = 4! + 4 \cdot \sqrt{4} + \sqrt{4} = 24 + 4 \cdot 2 + 2 = 24 + 8 + 2$
- ganz kompliziert: $31 = 4! + (4! + 4) : 4 = 24 + (24 + 4) : 4 = 24 + 28 : 4 = 24 + 7$

1 =	16 =
2 =	17 =
3 =	18 =
4 =	19 =
5 =	20 =
6 =	21 =
7 =	22 =
8 =	23 =
9 =	24 =
10 =	25 =
11 =	26 =
12 =	27 =
13 =	28 =
14 =	29 =
15 =	30 =

Für wie viele Zahlen hast du einen Rechenausdruck gefunden?

Verflixte Vier - Lösungen

Du sollst möglichst viele Zahlen von 1 bis 30 nur mithilfe der Ziffer 4 als Rechenausdruck aufschreiben. Aber Achtung:

- du musst genau viermal die Ziffer 4 verwenden, nicht mehr und nicht weniger
- du hast freie Auswahl bei den Rechenzeichen $+$ $-$ $\cdot$ und $:$
- du darfst so viele Klammern verwenden wie du möchtest
- du darfst $\sqrt{4}$ („Wurzel aus vier“) verwenden, das kennst du noch nicht:
 $\sqrt{4}$ ist die positive Zahl, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt, also ist $\sqrt{4} = 2$
- du darfst $4!$ („vier Fakultät“) verwenden, das kennst du noch nicht:
 $4!$ bedeutet $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, also ist $4! = 24$.

Beispiele:

- einfach: $32 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 16 + 16$
- schwieriger: $34 = 4! + 4 \cdot \sqrt{4} + \sqrt{4} = 24 + 4 \cdot 2 + 2 = 24 + 8 + 2$
- ganz kompliziert: $31 = 4! + (4! + 4) : 4 = 24 + (24 + 4) : 4 = 24 + 28 : 4 = 24 + 7$

$1 = 4 : 4 + 4 - 4$	$16 = 4 \cdot 4 + 4 - 4$
$2 = 4 : 4 + 4 : 4$	$17 = 4 \cdot 4 + 4 : 4$
$3 = (4 + 4 + 4) : 4$	$18 = 4 \cdot 4 + 4 - \sqrt{4}$
$4 = 4 : \sqrt{4} + 4 : \sqrt{4}$	$19 = 4! - 4 - 4 : 4$
$5 = \sqrt{4} + \sqrt{4} + 4 : 4$	$20 = 4 \cdot 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4}$
$6 = 4 + \sqrt{4} + 4 - 4$	$21 = 4! - 4 + 4 : 4$
$7 = 4 + 4 - 4 : 4$	$22 = 4 \cdot 4 + 4 + \sqrt{4}$
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$	$23 = 4! - \sqrt{4} + 4 : 4$
$9 = 4 + 4 + 4 : 4$	$24 = 4 \cdot 4 + 4 + 4$
$10 = 4 \cdot 4 - 4 - \sqrt{4}$	$25 = 4! + \sqrt{4} - 4 : 4$
$11 = 4 + (4! + 4) : 4$	$26 = 4! + \sqrt{4} + 4 - 4$
$12 = 4 \cdot 4 - \sqrt{4} - \sqrt{4}$	$27 = 4! + \sqrt{4} + 4 : 4$
$13 = (4! + 4! + 4) : 4$	$28 = 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - 4$
$14 = 4 + 4 + 4 + \sqrt{4}$	$29 = 4! + 4 + 4 : 4$
$15 = 4 \cdot 4 - 4 : 4$	$30 = 4! + 4 + \sqrt{4}$

Für wie viele Zahlen hast du einen Rechenausdruck gefunden?

Lehrerblatt

Die im Folgenden vorgestellten Spiele sollen den SuS Grundfertigkeiten beim Bruchrechnen vermitteln. Man kann die Spiele eine ganze Unterrichtsstunde lang durchführen oder ganz bewusst zur Lückenfüllung bei anderen Stunden verwenden. Dabei sollte man aber immer die Ziele der Spiele im Auge behalten:

Ziele:

- Intuitive Vorstellung von einem Bruch: $\frac{1}{4}$
- Größenvergleich von Brüchen
- Grundrechenarten von Brüchen im Kopf



Mögliche didaktische Reduktionen:

Nur Stammbrüche betrachten (s.a. Unterrichtsstunde Stammbrüche). Man kann dann mit sehr einfachen Regeln arbeiten:

Addition: $\frac{\text{Summe}}{\text{Produkt}}$; Subtraktion: $\frac{\text{Differenz}}{\text{Produkt}}$; Multiplikation: $\frac{1}{\text{Produkt}}$; Division: $\frac{\text{Nenner2}}{\text{Nenner1}}$;

Vergleich: Der Bruch mit dem größeren Nenner ist der kleinere.

Diese Regeln sind so einfach, dass man ohne großen Rechenaufwand auskommt.

Bewertung der Spielideen innerhalb des didaktischen Konzepts:

Rein auf Leistung orientierte Spiele können leicht zu Frustrationen führen. Besser sind Kombinationen aus Glück und Leistung. Verliert man, dann hat man Pech gehabt, gewinnt man, dann war man gut. Das ist auch ein Ansatzpunkt für Lob und Trost.

Spiele

1. Aufgabenwürfeln

Aufteilung in Gruppen. Auf einem Stapel liegen gemischt und verdeckt Zettel mit Bruchrechenaufgaben mit Platzhaltern. Jeder Schüler nimmt eine Aufgabe vom Stapel.

Nun würfelt er für jeden Platzhalter eine Zahl und kann dann diese gewürfelten Zahlen nach eigenem Ermessen für die Platzhalter eintragen. Der Schüler dessen Aufgaben-Ergebnis am kleinsten ist, bekommt einen Strich, der nächstgrößere zwei Striche und so weiter. Sind die Ergebnisse gleich, bekommen beide gleich viel Striche. Sind alle Aufgabenzettel verbraucht, wird abgerechnet. Sieger ist derjenige, der am wenigsten (alternativ meisten) Striche hat.

Variante: Lehrer schreibt eine Aufgabe mit Platzhaltern an die Tafel. Immer zwei Schüler würfeln zusammen die Zahlen, die eingesetzt werden müssen und setzen diese dann ein. Die Striche werden dann an der Tafel geführt. Das klappt bei nicht zu großen Klassen ganz gut.

Beispielaufgaben:

$$\frac{1}{2} + \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{2} - \frac{1}{\square}, \frac{\square}{6} - \frac{1}{\square} \dots$$

2. Brüche-Poker

Die Klasse wird in Kleingruppen zu drei bis vier SuS eingeteilt. Das Spiel wird in jeder der Gruppen getrennt gespielt. Jeder Schüler erhält eine gleiche Zahl von Spiel-Chips. Auf den Poker-Karten steht jeweils ein Bruch. Jeder Schüler erhält 4 Karten (Mischen und austeilen). Er multipliziert im Kopf die Brüche, die er auf der Hand hält. Nun setzt der erste in die Mitte seinen Einsatz von Chips. Die anderen können nun reihum "mitgehen" und genau so viele Chips setzen, erhöhen und mehr Chips setzen, dann muss der nächste beim Mitgehen die höhere Chipszahl setzen, oder wegbleiben, dann legen sie ihre Karten verdeckt weg und ihre gesetzten Chips sind verloren, bleiben aber vorerst in der Mitte liegen. Wenn man mitgeht, kann man verlangen, dass alle ihre Karten zeigen. Dann erhält derjenige, der den kleinsten Bruch hat, den kompletten Einsatz, sofern er noch im Spiel ist, also nicht weggeblieben ist. Zusätzlich kann man immer, wenn man an der Reihe ist, bevor man seinen Einsatz macht, bis zu vier Karten abgeben und dafür entsprechend viele Karten aus dem Stapel aufnehmen. Sind alle Karten aufgebraucht, werden die abgelegten neu gemischt und als neuer Stapel verwendet.

Eine Runde endet, wenn alle bis auf einen weggeblieben sind, dann bekommt dieser alle gesetzten Chips, oder, wenn jemand verlangt hat alle Karten zu sehen (s.o.).

Insgesamt endet das Spiel, wenn einer keine Chips mehr hat. Sieger ist dann derjenige, der am meisten Chips hat.

3. Brüche-Minimum (bzw. Minimal)

Das Spiel wird in jeder der Gruppen getrennt gespielt. Jeder Schüler hat 4 Karten mit je einem Bruch beschriftet. Er sieht die Karten der anderen nicht. Reihum kann nun jeder Schüler eine Karte seinem nächsten Nachbarn geben. Nach jeder Runde kann jeder beliebige Spieler verlangen, dass die Karten offengelegt werden. Gewonnen hat derjenige, dessen Karten die kleinste Summe (oder das kleinste Produkt) ergeben.

4. Brüche-Black-Jack

Die Klasse wird in Kleingruppen zu drei bis vier SuS eingeteilt. Das Spiel wird in jeder der Gruppen getrennt gespielt. Ein Spieler ist die Bank. Er nimmt zwei Karten vom Stapel und teilt an jeden Spieler zwei Karten aus. Die Bank setzt eine gewisse Anzahl von Chips. Jeder Spieler kann nun ebenfalls eine Anzahl von Chips setzen, jedoch nie mehr als die Bank. Nun teilt die Bank an jeden Spieler zwei weitere Karten aus. Jeder Spieler kann entscheiden, ob er keine, eine oder beide ausgeteilten Karten aufnimmt. Ist die Summe der Brüche auf seiner Hand größer als 1, dann muss er seine Karten offenlegen. Das Spiel

endet, wenn keiner mehr eine Karte genommen hat. Derjenige, dessen Summe der Brüche auf der Hand am nächsten an 1 aber nicht darüberliegt, gewinnt alle Chips. Bei gleicher Summe wird geteilt.

Variante: Setzt ein Spieler genau so viele Chips wie die Bank, endet das Spiel sofort.

5. Brüche-Quartett

Die Klasse wird in Kleingruppen zu drei bis vier SuS eingeteilt. Das Spiel wird in jeder der Gruppen getrennt gespielt. Zuerst erzeugt jede Gruppe ein Brüche-Quartett. Dazu werden immer vier Karten mit einem unterschiedlichen Bruch beschriftet, der zur gleichen Bruchzahl gehört, also z.B. $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{14}{28}; 0,5$. Nun spielt eine andere Gruppe mit diesem Quartett vollkommen analog zu einem üblichen Quartett-Spiel.

6. Aufgaben-Wettkampf

Die Klasse wird in Gruppen eingeteilt. Es spielen alle Gruppen im Plenum gegeneinander. Die Lehrkraft schreibt eine bestimmte Anzahl natürlicher Zahlen an die Tafel. Eine Stoppuhr läuft. Jede Gruppe schreibt in der vorgegebenen Zeit eine Aufgabe auf, in der nur die Zahlen von der Tafel vorkommen dürfen. Außerdem schreibt sie auf die Rückseite des Zettels das Ergebnis. Die Zettel werden abgegeben. Die Lehrkraft schreibt die Aufgaben und die Ergebnisse an die Tafel. Die SuS dürfen nun die Aufgaben, deren Ergebnisse falsch sind, benennen. Diese werden vom Lehrer gelöscht. Gewonnen hat die Gruppe, deren richtiges Ergebnis am kleinsten (alternativ am größten) ist. Man kann dies z.B. mit einem Pferderennen kombinieren. Jede Gruppe hat ein Pferd an der Tafel, das beim Sieg ein Stück vorrückt. Wer eine falsche Aufgabe abgibt, muss an den Start (alternativ nur einen Schritt) zurück.

7. Rot-Grün

Die Lehrkraft hat Schilder, auf denen ein Bruch bzw. eine bildliche Darstellung eines Bruchs, z.B. als gefärbtes Kreisdiagramm oder gefärbter Anteil eines Rechtecks oder ähnliches. Die SuS haben rote und grüne Karten. Die Lehrkraft hält in der linken Hand einen Bruch und in der rechten Hand eine bildliche Darstellung hoch. Symbolisieren sie den gleichen Bruch, halten die SuS eine grüne sonst eine rote hoch. Nun kann man daraus wieder verschiedene Spiele machen, z.B. die Klasse in zwei Gruppen teilen. Diejenigen mit den meisten richtigen Karten spielen den Ball in einem Fußballspiel in die gegnerische Richtung. Nach x Stationen gibt es ein Tor und erneuten Anstoß, oder ein Pferderennen mit einzelnen Gruppen oder...

Wichtig ist dabei, dass alle nach vorne schauen und die Karten auf der Rückseite neutral sind. Könnte disziplinarisch schwierig sein.

8. Auf die Plätze

Jeder Schüler erhält ein Kärtchen mit einem Bruch. An der Tafel steht links ein Größer - Zeichen, rechts ein Kleiner - Zeichen und in der Mitte ein Gleich - Zeichen. Nun schreibt der Lehrer einen Bruch an die Tafel und zählt langsam bis 10. Die SuS müssen nun zu dem Platz an der Tafel laufen, der zu ihrem Bruch passt, ist er also größer als der Bruch an der Tafel, gehen sie zum Größer-Zeichen. Ist der Lehrer bei 10 angekommen, muss jeder seinen Platz gefunden haben.

Auch daraus kann jetzt wie bei Rot-Grün ein Spiel machen. Am einfachsten ist es, wenn jeder der richtig steht, einen Punkt bekommt. Der Rechenkönig ist dann derjenige, der nach vorgegebener Anzahl von Durchgängen am meisten Punkte hat.

Lehrerblatt
Sachanalyse:

Das Bearbeiten von Textaufgaben kann systematisiert werden. Die in dieser Stunde vermittelten Schritte sind folgende:

1. Text lesen – sich einen Überblick verschaffen
2. Unbekannte Begriffe klären
3. Fragen stellen: Was ist gegeben? Was ist gesucht?
4. Aufgabe lösen – dabei Problemlösestrategien anwenden

Lösung überprüfen

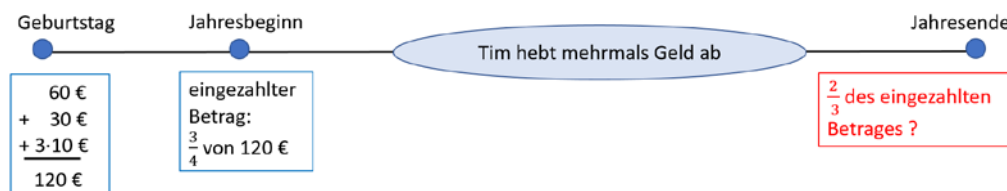
Antwortsatz formulieren

5. Reflexion: Was ist wichtig für künftige Aufgaben?

Zu Aufgabe 1:

Die Längen des Hauses sind Dezimalzahlen. Falls die SuS das Rechnen mit Dezimalzahlen noch nicht behandelt haben, so müssen die Längenangaben in Meter zunächst in Dezimeter umgerechnet werden. Alternativ könnten die Längen vereinfacht werden (z.B. Gesamthöhe des Hauses 8 m anstatt 8,10 m). Der Flächeninhalt des „Giebel dreiecks“ kann einerseits mit der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet werden. Diese wird in Klasse 5 oder 6 behandelt. Sollte diese Formel noch nicht bekannt sein, so können die beiden Hälften des gleichschenkligen „Giebel dreiecks“ auch zu einem Rechteck mit der Länge $\frac{1}{2} \cdot 7,50$ m zusammengesetzt werden.

Bei Aufgabe 2 ist die Visualisierung mit einer informativen Figur hilfreich:


Ziele:

- Strategien zum Lösen von Textaufgaben schulen
- bereits bekannte Problemlösestrategien anwenden
- Selbstvertrauen schaffen und Kompetenz erleben

Material:

- AB „Textaufgaben lösen mit Strategie“
- AB „Textaufgaben – Signalwörter“
- Visualizer oder ABs auf Overheadfolie
- Lesezeichen „Textaufgaben kann ich doch“ (auf dickeren Karton kopiert oder laminiert).

Didaktischer KommentarVorbemerkung:

Vor dieser Stunde sollte die Stunde „Problemlösen“ bereits gehalten worden sein, damit Problemlösestrategien wie Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten bekannt sind.

Viele SuS haben regelrecht Angst vor Textaufgaben und scheuen vor diesen zurück. In der heutigen Stunde sollen die SuS eine umfassende Strategie zum Lösen von Textaufgaben verinnerlichen und ihnen bereits bekannte Problemlöse-Strategien bei Textaufgaben anwenden.

Die Stunde beginnt mit einer kurzen Umfrage, was die SuS an Textaufgaben schwierig finden. Vermutlich kommen dabei Nennungen wie *„Ich verstehe manchmal gar nicht, um was es genau geht.“* oder *„Ich weiß nicht, was ich da rechnen soll.“*

Zunächst wird Aufgabe 1 auf dem AB „Textaufgaben lösen mit Strategie“ bearbeitet: nach einer kurzen Überlegungsphase in Einzelarbeit wird die Aufgabe gemeinsam gelöst. Hierbei sollen die SuS erkennen, dass – auch bei zunächst unklarem Rechenweg – sowohl die ihnen bereits bekannte Strategie Vorwärtsarbeiten als auch das Rückwärtsarbeiten zur Lösung der Aufgabe führen.

Es folgt eine Reflexion über die Vorgehensweise bei Textaufgaben. Aus der Grundschule kennen die SuS das Schema *„Was ist gegeben? – Was ist gesucht? – Rechenweg – Antwortsatz“*. Vielen SuS fällt es schwer, einen Aufgabentext vollständig zu verstehen, weshalb auf dem auszuteilenden Lesezeichen zwei Schritte vorgeschaltet sind: zunächst soll der Text erfasst werden, anschließend werden unklare Begriffe erklärt. Da die SuS ihre strategischen Erfahrungen zunehmend vernetzen sollen, überlegen sie nach dem Lösen der Aufgabe, was sie dabei für künftige Aufgaben gelernt haben. Das Lesezeichen dürfen die SuS behalten und künftig beim Lösen von Textaufgaben benutzen.

Oft ist es für SuS schwierig zu erkennen, welche Rechenoperationen beim Lösen einer Aufgabe angewendet werden müssen. Dabei gibt es Signalwörter wie *aufteilen, verringern ...*, die auf bestimmte Rechenoperationen hinweisen. Diese sollen nun in der Tabelle „Textaufgaben – Signalwörter“ zusammengetragen werden.

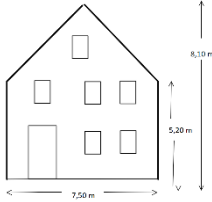
Den Aufgabentext von Aufgabe 2 sollen die SuS zunächst auf derartige Signalwörter untersuchen, bevor sie die Aufgabe in Einzel- oder Partnerarbeit lösen. SuS mit Schwierigkeiten bei der Aufgabe sollte die Lehrkraft unauffällig Tipps geben, damit auch sie ein Kompetenzgefühl haben. Anschließend wird die Aufgabe gemeinsam besprochen. Dabei sollte der Verlauf der Aufgabe durch eine informative Figur (s. Lehrerblatt) visualisiert werden.

Die Stunde wird abgerundet durch eine zweite Reflexionsphase zur Vernetzung der gelernten Strategien. Hierbei machen sich die SuS nochmals bewusst, was sie sich für künftige Stunden zum Lösen von Textaufgaben merken wollen.

Als Puffer können Textaufgaben aus dem Schulbuch mit der heute gelernten Vorgehensweise bearbeitet werden: entweder noch unbekannte Aufgaben oder bereits im Unterricht behandelte Aufgaben, die den SuS ursprünglich schwierig erschienen sind (vgl. Vorschlag für Arbeitsauftrag auf dem Verlaufsplan).

Textaufgaben lösen mit Strategie:

Aufgabe 1:



Die Giebelwand eines Hauses soll neu angestrichen werden. Die Fenster sind jeweils 1 m breit und 1,20 m hoch. Die Türmaße sind 1,5 m und 2 m.

Mit welchen Kosten ist für die Farbe zu rechnen?



1. Um was geht es in der Aufgabe?
2. Gibt es Begriffe, die du nicht verstehst?
3. Was ist gegeben?

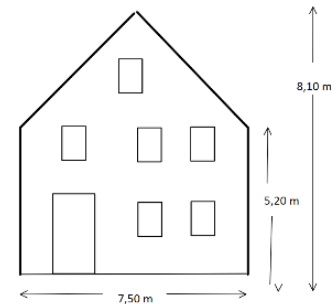
Was ist gesucht?

4a) Aufgabe lösen - Strategie Vorwärtsarbeiten:

Beim Vorwärtsarbeiten gehst du von den gegebenen Größen aus. Du kannst in der Skizze erkennen, dass einige Seitenlängen gegeben sind. Welche fehlen noch? Berechne diese.

Was kannst du berechnen, wenn du die Seitenlängen der Front kennst?
Ja, richtig - den Flächeninhalt.

Aus welchen Flächen ist die Giebelwand zusammengesetzt? Welche Fläche wird nicht gestrichen? Berechne den Inhalt der Fläche, die gestrichen werden muss.



Jetzt kennst du den Flächeninhalt und kannst nun entscheiden, wie viel kg Farbe du benötigst:

Wenn du weißt, wie viel kg du benötigst, weißt du auch, wie viele Eimer du brauchst und was diese kosten.

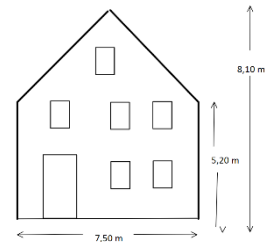
4b) Oder: Aufgabe lösen - Strategie Rückwärtsarbeiten:

Beim Rückwärtsarbeiten überlegst du dir zunächst, wie du die gesuchte Größe - hier den Preis für die Farbe - berechnen kannst.

Der Preis für die Farbe hängt davon ab, wie viele Eimer gebraucht werden. Was musst du wissen, um dies entscheiden zu können?

Richtig, den Flächeninhalt der zu streichenden Fläche. Was brauchst du, um diesen berechnen zu können?

Die Fläche ist aus zwei Teilflächen zusammengesetzt. Um ihren Inhalt berechnen zu können, brauchst du die Seitenlängen der einzelnen Teilflächen. Berechne diese. Welche Flächen werden nicht gestrichen?



Gehe nun wieder den Weg zur gesuchten Größe zurück:

- Berechne den Inhalt der Fläche, die gestrichen werden muss.

- Entscheide, wie viele Eimer Farbe benötigt werden:

- Berechne den Preis für die Farbe.

5. Lösung überprüfen (kann dein Ergebnis von der Größe und von den Einheiten her stimmen?)**6. Antwortsatz formulieren**

Die Überlegungen des Rückwärtsarbeitens und des Vorwärtsarbeitens führen zum gleichen Lösungsweg und zur gleichen Lösung.

Beim **Vorwärtsarbeiten** geht man von den gegebenen Größen aus und überlegt mit diesen Informationen, welche weiteren Größen daraus berechnet werden können.

Beim **Rückwärtsarbeiten** geht man vom Ziel aus und überlegt, welche Größen man kennen muss, um dieses Ziel zu erreichen. Erst die daraus folgenden Rechnungen nutzen die gegebenen Größen aus.

In vielen Fällen ist es auch sinnvoll, die beiden Strategien des Vorwärts- und des Rückwärtsarbeitens miteinander zu kombinieren.

Aufgabe 2:

Tim hat zu seinem Geburtstag von seinem Opa 60 €, von seiner Patentante 30 € und von jedem seiner 3 eingeladenen Freunde je 10 € bekommen. Zu Beginn des Jahres zahlt er $\frac{3}{4}$ dieses Betrages auf sein Konto ein. Im Laufe des Jahres hebt er mehrere Geldbeträge ab, sodass er am Ende des Jahres nur noch $\frac{2}{3}$ des eingezahlten Betrages auf dem Konto hat.

- a) Wie viel hat er am Jahresende noch auf dem Konto?
- b) Welcher Anteil des ursprünglichen Betrages ist das?

1. Um was geht es in der Aufgabe? Unterstreiche Signalwörter, die auf eine Rechenart hindeuten.
2. Gibt es Begriffe, die du nicht verstehst?
3. Was ist gegeben?

Was ist gesucht?

4. Aufgabe lösen – hier hilft es, die Vorgänge in einer informativen Figur darzustellen.
5. Probe und Antwortsatz:



Textaufgaben – Signalwörter

Bei Textaufgaben musst du den Text ganz genau lesen. Dabei verraten dir oft schon einzelne Wörter, welche Rechenart du anwenden musst.

So sind deuten *hinzufügen* oder *insgesamt* oder *zusammenzählen* auf eine Addition hin. *Weniger* oder *wegnehmen* oder *abheben* sind Signalwörter für die Subtraktion.

Ergänze die untenstehende Liste mit Signalwörtern für die 4 verschiedenen Rechenarten. Setze die Liste fort, wenn dir bei weiteren Textaufgaben weitere Signalwörter auffallen. Im Laufe der Zeit kannst du dann immer schneller bereits beim Lesen des Aufgabentextes erkennen, wie du rechnen musst.

addieren	subtrahieren	multiplizieren	dividieren
dazuzählen	wegnehmen	mal	teilen / aufteilen
hinzufügen			
insgesamt			



Textaufgaben kann ich doch!!!

1. **Ich lese:**
Um was geht es in der Aufgabe?
Wichtige Wörter unterstreichen.
2. **Ich kläre die Wörter:**
Hast du etwas nicht verstanden? Kläre es.
3. **Ich suche Fragen:**
Was weißt du schon? Was sollst du herausfinden?
4. **Ich finde die Antwort/ löse die Aufgabe:**
 - Aufgabe nochmals genau durchlesen, wichtige Zahlen und Angaben unterstreichen.
 - Aufgabe lösen – dabei Problemlösestrategien an-wenden (z.B. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisch ausprobieren, in Teilprobleme zerlegen, Zeichnung, Tabelle...)
 - Lösung überprüfen und Antwortsatz formulieren.
5. **Ich gewinne Erkenntnisse:**
Was war interessant? Was merkst du dir für künftige Aufgaben?



Textaufgaben kann ich doch!!!

1. **Ich lese:**
Um was geht es in der Aufgabe?
Wichtige Wörter unterstreichen.
2. **Ich kläre die Wörter:**
Hast du etwas nicht verstanden? Kläre es.
3. **Ich suche Fragen:**
Was weißt du schon? Was sollst du herausfinden?
4. **Ich finde die Antwort/ löse die Aufgabe:**
 - Aufgabe nochmals genau durchlesen, wichtige Zahlen und Angaben unterstreichen.
 - Aufgabe lösen – dabei Problemlösestrategien an-wenden (z.B. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisch ausprobieren, in Teilprobleme zerlegen, Zeichnung, Tabelle...)
 - Lösung überprüfen und Antwortsatz formulieren.
5. **Ich gewinne Erkenntnisse:**
Was war interessant? Was merkst du dir für künftige Aufgaben?



Textaufgaben kann ich doch!!!

1. **Ich lese:**
Um was geht es in der Aufgabe?
Wichtige Wörter unterstreichen.
2. **Ich kläre die Wörter:**
Hast du etwas nicht verstanden? Kläre es.
3. **Ich suche Fragen:**
Was weißt du schon? Was sollst du herausfinden?
4. **Ich finde die Antwort/ löse die Aufgabe:**
 - Aufgabe nochmals genau durchlesen, wichtige Zahlen und Angaben unterstreichen.
 - Aufgabe lösen – dabei Problemlösestrategien an-wenden (z.B. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisch ausprobieren, in Teilprobleme zerlegen, Zeichnung, Tabelle...)
 - Lösung überprüfen und Antwortsatz formulieren.
5. **Ich gewinne Erkenntnisse:**
Was war interessant? Was merkst du dir für künftige Aufgaben?



Textaufgaben kann ich doch!!!

1. **Ich lese:**
Um was geht es in der Aufgabe?
Wichtige Wörter unterstreichen.
2. **Ich kläre die Wörter:**
Hast du etwas nicht verstanden? Kläre es.
3. **Ich suche Fragen:**
Was weißt du schon? Was sollst du herausfinden?
4. **Ich finde die Antwort/ löse die Aufgabe:**
 - Aufgabe nochmals genau durchlesen, wichtige Zahlen und Angaben unterstreichen.
 - Aufgabe lösen – dabei Problemlösestrategien an-wenden (z.B. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisch ausprobieren, in Teilprobleme zerlegen, Zeichnung, Tabelle...)
 - Lösung überprüfen und Antwortsatz formulieren.
5. **Ich gewinne Erkenntnisse:**
Was war interessant? Was merkst du dir für künftige Aufgaben?

Unterrichtsverlauf

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit GA ... Gruppenarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht. Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	Wer von euch mag Textaufgaben? Warum – warum nicht? Was ist an Textaufgaben schwierig? Info: Wir wollen heute Strategien besprechen, mit denen ihr fast jede Textaufgabe „knacken“ könnt.	
2. Erarbeitung 1 EA FEU 30 Min.	Aufgabe 1 auf dem AB: SuS lesen Aufgabe durch und überlegen, wie die Aufgabe gelöst werden muss (ca. 3-5 Min.) Gemeinsame Bearbeitung der Aufgabe	AB „Textaufgaben lösen mit Strategie“ Visualizer bzw. AB auf OHP-Folie
3. Reflexion 1 FEU 5 Min.	Wie sind wir vorgegangen? Lesezeichen „Tkid – Textaufgaben kann ich doch“ austeilen und besprechen	Lesezeichen
4. Erarbeitung 2 FEU 5 Min.	Oft deuten Signalwörter in Aufgabentexten auf eine Rechenart hin. AB „Textaufgaben – Signalwörter“ austeilen. Gemeinsam weitere Signalwörter suchen und eintragen.	AB „Textaufgaben – Signalwörter“ Visualizer bzw. AB auf OHP-Folie
5. Anwendung EA/PA/GA 10 Min.	SuS bearbeiten Aufgabe 2: Signalwörter suchen – Aufgabe lösen. Lehrkraft gibt SuS ggfs. Tipps bzw. löst Aufgabe gemeinsam mit SuS, die alleine keine Aufgabe lösen können. Gemeinsame Entwicklung einer informativen Figur an der Tafel	
6. Reflexion 2 FEU 5 Min.	Was merkt ihr euch für künftige Textaufgaben? Evtl.: Fällt euch eine Aufgabe aus dem Unterricht ein, wo eine heute gelernte Strategie hilfreich wäre?	

In 45 Minuten kann nur Aufgabe 1 bearbeitet werden. In 60-Minuten-Stunden können schnelle SuS als Puffer Textaufgaben aus dem eingeführten Schulbuch bearbeiten. Ebenso können in 90-Minuten-Stunden Textaufgaben aus dem Schulbuch betrachtet werden. Dabei können entweder neue Aufgaben gelöst oder bereits behandelte Aufgaben nochmals bearbeitet werden (denkbarer Arbeitsauftrag: *Sucht euch eine Textaufgabe aus dem Schulbuch heraus, die ihr im Unterricht bereits bearbeitet habe und die schwierig für euch war. Bearbeitet sie mit den heute gelernten Strategien nochmals. Findest du sie immer noch schwierig?*).

Lehrerblatt

Die Knobelaufgaben-Sammlung umfasst etwa **100 Aufgaben** (Teilaufgaben sind einzeln gezählt) – samt Lösungen, ggf. Differenzierungsvorschlägen und Kommentaren. Bisweilen wird auch der mathematische Hintergrund beleuchtet. Die Lehrkraft darf / kann / soll / muss mehr wissen als seine Schüler ☺. Man darf den Begriff Knobelaufgabe hier gerne im weiteren Sinn verstehen. Trotzdem haben nicht wenige Aufgaben dieser Sammlung den typischen Knobelaufgaben-Clou. Einige der Knobelaufgaben haben auch die immanente Wiederholung von Stoffen aus Klasse 5 zum Inhalt.

Die Aufgaben können bei Mkid-Stunden als **Puffer** eingesetzt werden. Man kann auch eigene Knobelaufgaben-Stunden machen.

Der **Zeitbedarf** erstreckt sich mit allen Abstufungen von einer Minute (*Balken, Cola, Dörtes Mutter*) bis zu einer ganzen Sitzung (*zeichnerisches Multiplizieren*), wenn man das ausdehnen möchte.

Manche Aufgabentypen (*Stimmt's, Schätzfragen*) eignen sich für ein kleines **Gewinnspiel**.

Eine Knobelaufgabe oder ein „Dreierpack“ einer geeigneten Mischung von Knobelaufgaben zum Abschluss der Mkid-Stunde könnte zu einem **Ritual** werden.

Manche Aufgaben eignen sich gut zur **selbständigen Variation** durch die Schülerinnen und Schüler (*Buchstaben-Rätsel, Durchschnitte, Würfel*).

Es ist nicht daran gedacht, dass die Lehrperson die Aufgaben gedruckt austeilte, sondern dass die **Aufgaben vorgelesen** und ggf. im Unterrichtsgespräch **erläutert** werden. Ggf. werden wichtige Informationen an die Tafel (o.ä.) geschrieben oder gezeichnet bzw. auf irgendeine Art projiziert. Für die Aufgaben *Punktsymmetrisch* und *Vier gleiche Teile* kann man auf das Arbeitsblatt *4-4-Quadrate* zurückgreifen, wenn man das möchte.

Bei Aufgaben die Figuren enthalten, kann man auf das Arbeitsblatt *Figuren* zurückgreifen oder sich selbst ein Arbeitsblatt mit den jeweils benötigten Figuren zusammenstellen.

Bei **schwierigen Aufgaben** ist es schon gut, wenn die Schülerinnen und Schüler

- das Problem erfassen und sich Gedanken machen
- von der Lehrkraft gesagt bekommen, dass dieses Problem ganz ganz schwierig ist
- selbständig erste Lösungsansätze fassen (loben, loben, loben!)
- mit einem Tipp auf die richtige Lösung kommen
- die Auflösung verstehen und deren intellektuellen Charme erkennen (*Schachbrett*)
- erkennen, dass es auch in aussichtslos scheinenden Situationen eine Lösung geben kann

An geeigneten Stellen wird die Lehrperson auf eine der **Problemlöse-Strategien** („Leben ist Problemlösen“ – Carl Popper, Philosoph, 1902-1994) hinweisen:

- mache eine Skizze oder lege eine Tabelle an
- mache ein Beispiel
- probiere systematisch
- teile das Problem in Teilprobleme auf
- betrachte den ungünstigsten Fall
- arbeite alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert ab
- Vorwärtsarbeiten bzw.: kann man etwas Einschränkendes über die Lösung sagen?

Die **Selbsterfahrung der Lehrkraft** ist wichtig beim Knobeln. Also: nicht immer gleich die Lösung anschauen ☺. Im Idealfall überträgt sich die Begeisterung der Lehrkraft beim Knobeln auf die Schüler.

Knobelaufgaben-Sammlung

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Ankreuzen:

Kreuze im Innern des Quadrates (linke Abbildung) noch 10 Felder an, so dass die Anzahl der Kreuze in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Zahl ist.

X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

X	X	X	X	X	X
X	X	X			X
X	X		X		X
X	X			X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X

Ankreuzen – Lösung:

Z.B.: rechte Abbildung

Ankreuzen – Kommentar:

Strategie: Frage vorab – Gibt es irgendwelche Einschränkungen für die Vielfalt der Lösungen, die aus der Aufgabenstellung folgen?

Antwort hier: Man kann in die 2. Zeile, 3. Zeile, 4. Zeile und 5. Zeile nur 0 oder 2 oder 4 Kreuze eintragen – wegen der in der Aufgabenstellung geforderten Geradzahligkeit der Kreuze in allen Zeilen.

Strategie: Probiere systematisch und lerne dabei.

Die nachfolgenden Zeilen zeigen eine mögliche Abfolge von Versuchen und Überlegungen.

1. Versuch: keine Kreuze eintragen in der 2. Zeile → zweimal 4 Kreuze und einmal 2 Kreuze eintragen in den drei anderen Zeilen → führt nicht zu einer Lösung

2. Versuch: keine Kreuze eintragen in der 3. Zeile → zweimal 4 Kreuze und einmal 2 Kreuze eintragen in den drei anderen Zeilen → führt nicht zu einer Lösung; usw.

Was haben wir bisher gelernt? Sind in einer Zeile keine Kreuze eingetragen, führt das nicht zu einer Lösung.

Also: In drei Zeilen müssen 2 Kreuze und in einer Zeile 4 Kreuze eingetragen werden.

3. Versuch: Dieser Ansatz führt zu einer Lösung, wenn man in den drei Zeilen, in die man 2 Kreuze einträgt, diese geeignet verteilt. Die anderen Lösungen entstehen aus der gezeigten Lösung durch Vertauschung von Zeilen bzw. Spalten.

Ankreuzen – Differenzierung:

Einfachere Aufgabenstellungen machen mehr Vorgaben.

Zum Beispiel so:

Kreuze im Innern des Quadrates in jeder Zeile noch zwei oder vier Felder an und zwar so, dass die Anzahl der Kreuze in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Zahl ist. Mache insgesamt 10 Kreuze.

Oder so:

Kreuze im Innern des Quadrates (Abbildung) noch 6 Felder an, so dass die Anzahl der Kreuze in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Zahl ist.

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

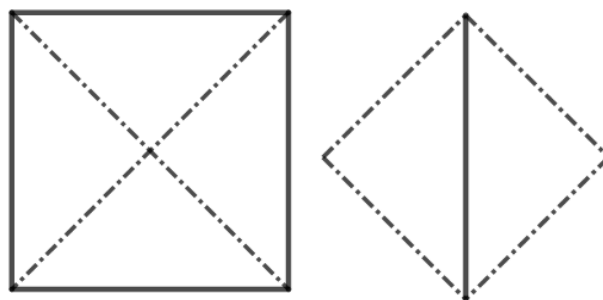
Aus eins mach zwei:

Zerschneide ein Quadrat in vier gleiche Teile, die du zu zwei Quadraten zusammenlegen kannst.

Aus eins mach zwei – Lösungen:

Zerschneide das Quadrat entlang der Diagonalen in vier gleiche rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke (linke Abbildung).

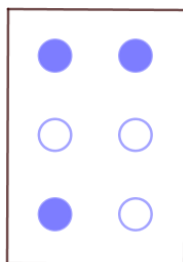
Setze je zwei davon zu einem Quadrat zusammen (rechte Abbildung).

**Blindenschrift:**

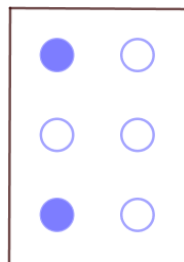
Die so genannte BRAILLE-Schrift verwendet für Buchstaben und andere Zeichen sechs Punkte, die in unterschiedlichen Kombinationen hervorstehen und mit dem Finger als Erhöhungen ertastet werden können (vgl. Abbildungen unten – ausgefüllte Kreise).

So steht also zum Beispiel für den Buchstaben M die folgende Kombination (linke Abbildung, weitere Beispiele in den drei anderen Abbildungen)

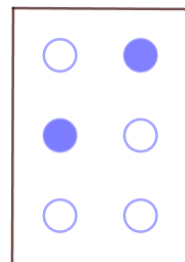
oben links: erhöht
oben rechts: erhöht
Mitte links: glatt
Mitte rechts: glatt
unten links: erhöht
unten rechts: glatt



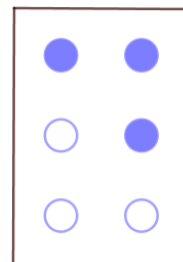
M



K



I



D

Wie viele Zeichen
sind in der BRAILLE-
Schrift möglich?

Blindenschrift – Lösung:

Es sind $2^6 = 64$ Zeichen möglich.

Für die Position oben links hat man 2 Möglichkeiten (erhöht oder nicht). Für jede dieser beiden Möglichkeiten hat man für die Position oben rechts wieder zwei Möglichkeiten. Das sind insgesamt jetzt schon $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Für jede dieser 4 Möglichkeiten hat man für die Position Mitte links 2 Möglichkeiten. Bis hierher also $2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten usw.

Blindenschrift – Kommentar:

Diese Denkrichtung – vielleicht sogar den Anfang eines Baumdiagramms – sollte die Lehrkraft als **Tipp** vorgeben.

Man könnte gemäß der **Strategie** „Teile das Problem in Teilprobleme auf.“ nämlich auch so verfahren:

- Wie viele Zeichen mit 0 erhöhten Punkten gibt es? Antwort: 1 (das ist offensichtlich)
- Wie viele Zeichen mit 1 erhöhtem Punkt gibt es? Antwort: 6 (das ist offensichtlich)
- Wie viele Zeichen mit 2 erhöhten Punkten gibt es? Antwort: 15 (das ist schon schwierig)
- Wie viele Zeichen mit 3 erhöhten Punkten gibt es? Antwort: 20

Ab hier kommt man aber leider ohne die Kenntnis von Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \text{Anzahl der Möglichkeiten aus } n \text{ Objekten } k \text{ auszuwählen, nicht mehr aus.}$$

Entre nous: – damit gilt dann: $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6$.

Brett:

Ein Brett ist 250 cm lang. Es soll in gleiche Stücke zu je 50 cm Länge zersägt werden. Wie oft muss man sägen?

Brett – Lösung:

Man muss 4-mal sägen, nicht 5-mal – wer's nicht glaubt, macht eine Skizze (**Strategie!**).

Brüder und Schwestern:

Max Meier hat genau so viele Brüder wie Schwestern. Seine Schwestern haben halb so viele Schwestern wie Brüder. Wie viele Jungen und wie viele Mädchen gibt es bei der Familie Meier?

Brüder und Schwestern – Lösungen:

Man wird zu Beginn einfach einmal ein Beispiel machen, um den Sachverhalt mit den vielleicht verwirrenden Formulierungen zu verstehen und dann daran zu lernen.

Strategie: Mache einfach einmal irgendein Beispiel, dass du den Sachverhalt zunächst überhaupt verstehst und lerne dann daraus.

1. Versuch: Familie Meier hat 4 Jungen und 4 Mädchen, dann hätte Max, er ist ja ein Junge, aber nur 3 Brüder. Erkenntnis: Es muss ein Junge mehr sein.

2. Versuch: Familie Meier hat 5 Jungen und 4 Mädchen. Jedes Mädchen hat dann 3 Schwestern und 5 Brüder. Das passt noch nicht ganz, es fehlt noch 1 Junge zum Doppelten.

3. Versuch: Familie Meier hat 6 Jungen und 5 Mädchen. Jedes Mädchen hat dann 4 Schwestern und 6 Brüder. Das passt noch weniger, jetzt fehlen schon 2 Jungen zum Doppelten. Erkenntnis: Vielleicht also weniger Kinder?

4. Versuch: Familie Meier hat 4 Jungen und 3 Mädchen. Jedes Mädchen hat dann 2 Schwestern und 4 Brüder. Jetzt passt es.

Brüder und Schwestern – Kommentar:

An die Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) ist dabei nicht gedacht.

J ... Anzahl der Jungen; M ... Anzahl der Mädchen

$$\text{LGS: } J - 1 = M \quad \wedge \quad 2 \cdot (M - 1) = J \quad \Leftrightarrow \quad J = 4 \quad \wedge \quad M = 3$$

Buchstaben-Rätsel mit Lösungen:

Zu einer „Abkürzung“ in einer abenteuerlichen Schreibweise ist eine Bedeutung zu finden.

Beispiel: 60 = M hat eine S → Bedeutung: 60 Minuten hat eine Stunde

24 = S hat ein T → 24 Stunden hat ein Tag

366 = T hat ein S → 366 Tage hat ein Schaltjahr

500 = G hat ein P → Bedeutung: 500 Gramm hat ein Pfund

100 = L hat ein HL → Bedeutung: 100 Liter hat ein Hektoliter

4 = E hat ein Q → Bedeutung: 4 Ecken hat ein Quadrat

1000 = KCM hat ein L → Bedeutung: 1000 Kubikzentimeter hat ein Liter

6 = Q hat ein W → Bedeutung: 6 Quadrate hat ein Würfel

31 = T hat der J → Bedeutung: 31 Tage hat der Januar

1000 = F hat der TF → 1000 Füße hat der Tausendfüßler (stimmt ja eigentlich gar nicht: Nach Wikipedia sind es im Extremfall 750)

Man wird den Schwierigkeitsgrad ausloten müssen und ggf. sogar jeweils die beiden Anfangsbuchstaben (**Tip**) vorgeben, z.B.: 6 = QU hat ein WÜ → Bedeutung: 6 Quadrate hat ein Würfel.

Buchstaben-Rätsel – Kommentar:

Mit den Schülerinnen und Schülern zusammen selbst Beispiele finden macht Spaß!

Gerne wird man auch weitere außermathematische Beispiele verwenden:

4 Blätter hat ein Glücks-Kleeblatt

die 4 Himmelsrichtungen heißen Nord, Ost, Süd und West

5 Finger hat eine Hand

7 Häute hat eine Zwiebel

11 Spieler hat eine Fußballmannschaft

16 Bundesländer hat die Bundesrepublik Deutschland

18 Mannschaften hat die Bundesliga

usw.

Cola:

Eine Dose Cola kostet 1 €. Das Cola selbst kostet 0,60 € mehr als die leere Dose. Was kostet die leere Dose?

Cola - Lösung:

Die spontane Idee, dass die leere Dose $1,00 \text{ €} - 0,60 \text{ €} = 0,40 \text{ €}$ kostet, ist falsch. Das offenbart eine Probe (!): $0,40 \text{ €} + (0,40 \text{ €} + 0,60 \text{ €}) = 1,40 \text{ €}$. Die Dose kostet 0,20 €. Das Cola kostet dann 0,80 €, das sind tatsächlich 0,60 € mehr als 0,20 €.

Die Lösung kann und soll durch Probieren gefunden werden, an die Verwendung eines linearen Gleichungssystems ist hier nicht gedacht.

Dörtes Mutter:

Die Mutter von Dörte hat 4 Kinder. Das erste Kind heißt Mara. Das zweite Kind hat heißt Mere. Das dritte Kind heißt Mimi. Wie heißt das vierte Kind?

Dörtes Mutter - Lösung:

Nein, es heißt nicht Momo. Das vierte Kind von Dörtes Mutter muss Dörte heißen, wenn die anderen drei Kinder offenbar nicht Dörte heißen.

Dreiecke:

Ordne sechs gleichlange Stäbe so an, dass vier gleichseitige Dreiecke entstehen – genau vier, nicht mehr und nicht weniger.

Dreiecke – Lösung:

Man bilde eine Dreieckspyramide, das so genannte Tetraeder.

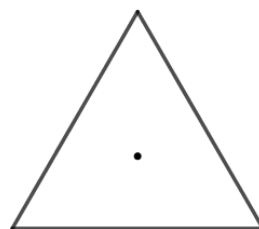
Dreiteilung:

Teile ein gleichseitiges Dreieck (vgl. Abbildung rechts mit eingetragenem Mittelpunkt) in deckungsgleiche Teile (gleiche Form und gleiche Größe) auf und zwar:

a) in drei Dreiecke

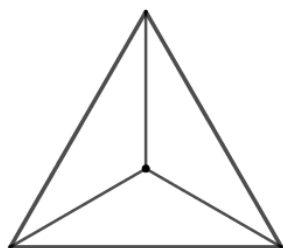
b) in drei Drachen

c) in drei Trapeze

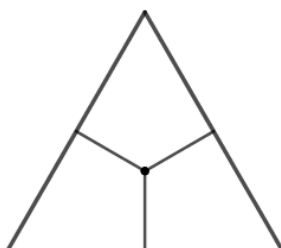


Dreiteilung – Lösungen:

a) Verbinde den Mittelpunkt mit den Eckpunkten.



b) Fülle das Lot vom Mittelpunkt auf die Seiten.



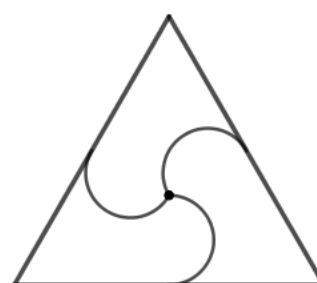
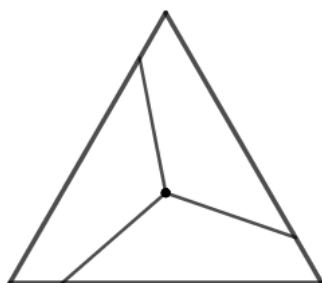
c) Zeichne Parallelen zu den Seiten durch den Mittelpunkt.

**Dreiteilung – Kommentar:**

Entre nous: Vom Mittelpunkt eines Dreiecks zu sprechen verbietet sich im Allgemeinen, weil dabei unklar ist, welche „Mitte“ gemeint ist. In Frage kommen z.B. der Umkreismittelpunkt, der Inkreismittelpunkt und der Schwerpunkt. Beim gleichseitigen Dreieck fallen alle diese Punkte (und noch weitere wie der Höhenschnittpunkt oder der FERMAT-TORRICELLI-Punkt, das ist der Punkt mit der minimalen Entfernungssumme zu den Eckpunkten) zusammen, so dass man wohl von „dem“ Mittelpunkt sprechen kann.

Dreiteilung – noch ein Kommentar:

Diese geometrische Situation ist stark verallgemeinerungsfähig. Man kann vom Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks aus eine beliebige Strecke – ja sogar irgendeinen Streckenzug oder eine beliebige Kurve – zum Rand zeichnen und diese dann zweimal um 120° drehen. Auf diese Weise erhält man stets eine drehsymmetrische Figur zum Drehmaß 120° bzw. eine Aufteilung in drei deckungsgleiche Flächen.

**Durchschnitte:**

- Wie lautet der Durchschnitt der Zahlen 3; 4 und 8?
- Wie lautet der Durchschnitt der Zahlen 3; 4; 7; 10 und 16?
- Finde drei unterschiedliche Zahlen mit dem Durchschnitt 10.
- Finde fünf unterschiedliche Zahlen mit dem Durchschnitt 20.
- Zu den Zahlen 3 und 8 ist eine dritte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der drei Zahlen 10 ist.
- Zu den Zahlen 2; 5 und 11 ist eine vierte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der vier Zahlen 10 ist.
- Es sind vier unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die zweitgrößte Zahl ist.
- Es sind drei unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die größte der drei Zahlen ist.
- Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 (jede der sechs Ziffern soll genau einmal verwendet werden) drei Zahlen deren Durchschnitt 37 ist.
- Felix hat von drei Zahlen den Durchschnitt berechnet. Er vergrößert eine der drei Zahlen um 6. Um wie viel vergrößert sich der Durchschnitt?

Durchschnitte – Lösungen:

a) $(3 + 4 + 8) : 3 = 15 : 3 = 5$

b) $(3 + 4 + 7 + 10 + 16) : 5 = 40 : 5 = 8$

c) z.B.: 9; 10; 11

d) z.B.: 18; 19; 20; 21; 22

e) Dritte Zahl: 19, die Summe der drei Zahlen muss $3 \cdot 10 = 30$ sein.

f) Vierte Zahl: 22, die Summe der vier Zahlen muss $4 \cdot 10 = 40$ sein.

g) z.B.: 1; 2; 3 und 10 mit Durchschnitt 4

h) Das ist nicht möglich.

i) $(14 + 62 + 35) : 3 = 111 : 3 = 37$

j) Der Durchschnitt vergrößert sich um 2.

Formal: $(a + b + c) : 3 = m$; $(a + b + c + 6) : 3 = m + 2$.

Man ist hier mit beispielgebundenen Argumentationen der Schülerinnen und Schüler zufrieden.

Durchschnitte – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können in aller Regel Durchschnitte (arithmetische Mittel) berechnen, auch schon vor einer Behandlung dieses Themas im Unterricht. Für diesen Fall würde man ausloten, was von den Aufgabenteilen a) bis j) möglich ist.

Schülerinnen und Schüler können ggf. selbst solche Aufgaben erfinden.

Durchschnitte – noch ein Kommentar:

Die so genannte *Ausgleichseigenschaft* ist für den Durchschnitt charakteristisch. Sie besagt, dass eine Zahl d genau dann Durchschnitt der n Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist, wenn sich die Abweichungen der x_i von d nach oben und die Abweichungen nach unten ausgleichen, also die vorzeichenbehaftete Abweichungssumme gleich 0 ist.

Beweis:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) : n = d \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n \cdot d \Leftrightarrow (x_1 - d) + (x_2 - d) + \dots + (x_n - d) = 0.$$

Beispiel:

$$x_1 = 3; x_2 = 4; x_3 = 8; d = 5$$

$$x_1 = 3: \text{ Abweichung nach unten} = 2, \text{ vorzeichenbehaftete Abweichung} = -2$$

$$x_2 = 4: \text{ Abweichung nach unten} = 1, \text{ vorzeichenbehaftete Abweichung} = -1$$

$$x_3 = 8: \text{ Abweichung nach oben} = 3, \text{ vorzeichenbehaftete Abweichung} = 3$$

$$\text{Es ist in der Tat } 3 = 2 + 1 \text{ bzw. } 3 + (-2) + (-1) = 0.$$

Bei der Aufgabe e) (Der Durchschnitt der drei Zahlen 3 und 8 und ??? soll 10 sein.)

kann man also auch vorgehen:

Man bestimmt zunächst die Summe der Abweichungen nach unten, diese beträgt $7 + 2 = 9$. Die dritte Zahl muss also $10 + 9 = 19$ lauten.

Elf:

Welche Zahl ist gemeint mit „elf Tausend elf Hundert elf“?

Elf – Lösungen:

$$11 \cdot 1000 + 11 \cdot 100 + 11 = 12.111$$

Elf – Kommentar:

Desgleichen: „zwölf Tausend zwölf Hundert zwölf“ ist dann $12 \cdot 1000 + 12 \cdot 100 + 12 = 13.212$

Extreme Körper:

Was für ein Körper ist das?

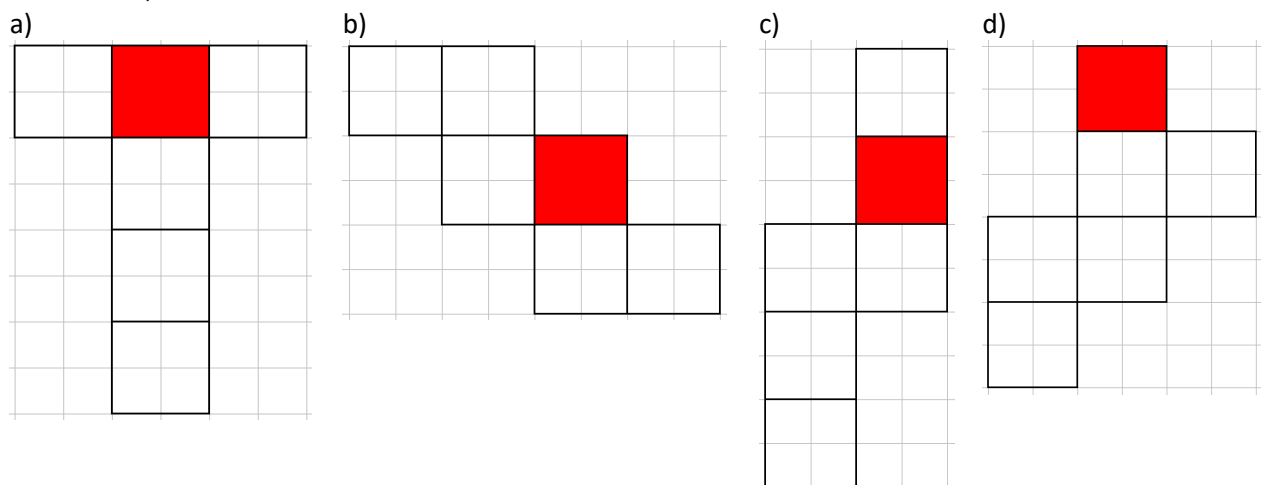
- a) ein einzelnes Spaghetti
- b) ein Blatt Papier DIN A4
- c) ein Sandkorn
- d) eine Büroklammer
- e) die Spitze eines gespitzten Bleistifts
- f) ein Bleistift ohne Spitze
- g) ein Haar
- h) ein Trinkhalm
- i) eine DVD

Extreme Körper - Lösung:

- a) ein Zylinder
- b) ein Quader (bei „normalem“ Papier beträgt die Höhe dieses Quaders etwa 0,1 mm)
- c) eine Kugel (in guter Näherung)
- d) ein gebogener Zylinder
- e) ein Kegel
- f) In aller Regel ist das ein Prisma, oft ist es sechseckig.
Zylinderförmige Bleistifte sind eher selten, weil sie nicht so praktisch sind, sie rollen von schrägen Tischflächen.
- g) ein Zylinder
- h) ein Hohlzylinder (das ist ein Zylinder bei dem innen ein kleinerer Zylinder „fehlt“)
- i) ein Hohlzylinder

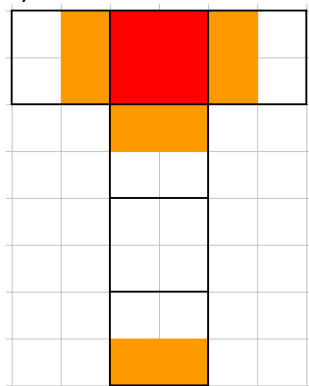
Farbe:

Robert hat einen Würfel mit der unteren Hälfte in rote Farbe getaucht. Die Abbildungen zeigen Netze dieses Würfels. Die untere Seitenfläche ist schon rot gefärbt. Zeichne ein, an welchen Stellen noch rote Farbe ist.

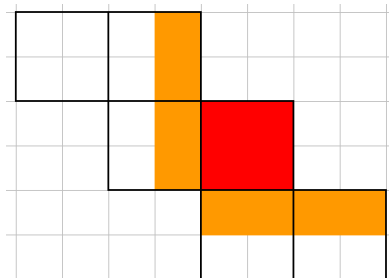


Farbe – Lösungen:

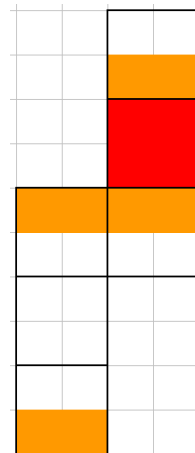
a)



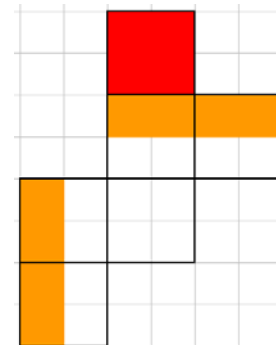
b)



c)



d)

**Farbige Socken:**

Leander hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Diese insgesamt 18 Socken liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander.

Er bittet Linda ihm ein Paar gleichfarbige zu holen. Linda ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden.

Wie viele Socken muss sie mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind?

Wir gehen hierbei davon aus, dass es keine linke oder rechte Socken gibt.

Farbige Socken – Lösung:

Sie muss mindestens vier Socken mitnehmen. Bei dreien sind es im ungünstigsten Fall drei verschiedene, bei vierten sind dann sicher zwei gleiche Farben dabei.

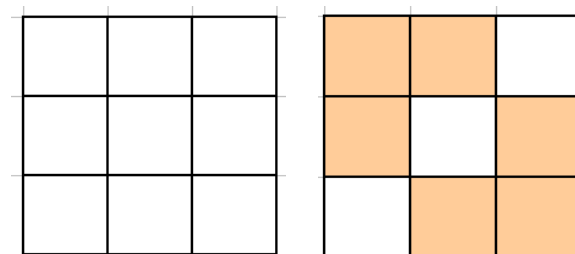
Farbige Socken – Kommentar:

Strategien hierbei sind:

- Den ungünstigsten Fall („worst-case“) betrachten.
- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden. Wenn $n+1$ Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

Felder:

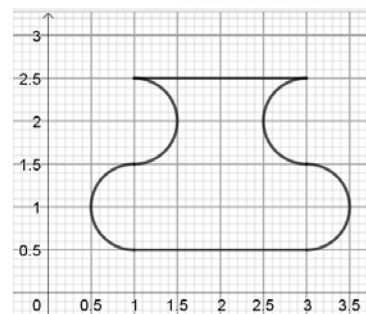
Färbe möglichst viele Felder (linke Abbildung), aber in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen sollen höchstens zwei Felder gefärbt sein.

**Felder – Lösung:**

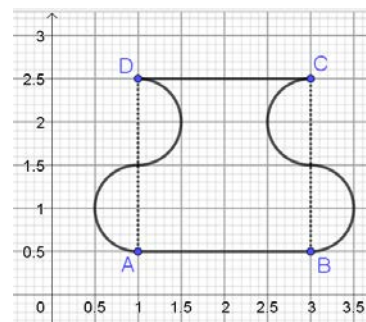
Rechte Abbildung – mehr als sechs Felder sind nicht möglich

Figur 1:

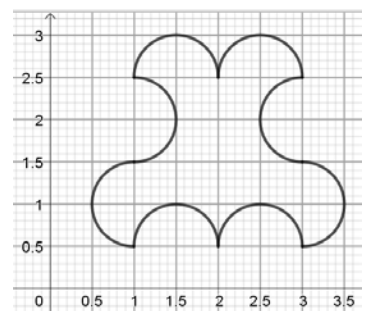
- a) Wie ist die Figur (Abbildung rechts) entstanden?
 b) Bestimme ihren Flächeninhalt – fast ohne etwas zu rechnen.

**Figur 1 – Lösung:**

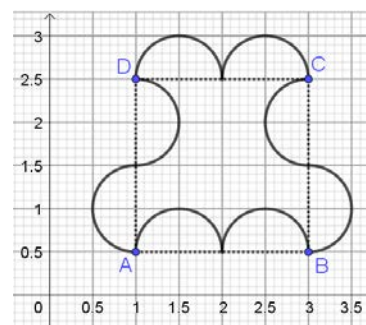
- a) Es wurden die beiden Strecken AB und DC (Abbildung rechts), sowie vier Halbkreise gezeichnet, zugehörige Mittelpunkte: (1|1); (3|1); (3|2); (1|2).
 b) Die Figur hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat ABCD der Kantenlänge 2. Die beiden überstehenden Halbreise „passen“ in die beiden Halbkreislücken.
 Der Flächeninhalt beträgt $2 \cdot 2 = 4 \text{ [cm}^2\text{]}$.

**Figur 2:**

- a) Wie ist die Figur (Abbildung rechts) entstanden?
 b) Bestimme ihren Flächeninhalt – fast ohne etwas zu rechnen.

**Figur 2 – Lösung:**

- a) Es wurden insgesamt acht Halbkreise gezeichnet. Zugehörige Mittelpunkte: (1,5|0,5); (2,5|0,5); (3|1) usw. (Abbildung rechts)
 b) Die Figur hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat ABCD der Kantenlänge 2. Geht man gedanklich von Quadrat ABCD aus, erkennt man, dass die überstehenden vier Halbreise in die vier Halbkreislücken „passen“.
 Der Flächeninhalt beträgt $2 \cdot 2 = 4 \text{ [cm}^2\text{]}$.

**Figur 2 – Kommentar:**

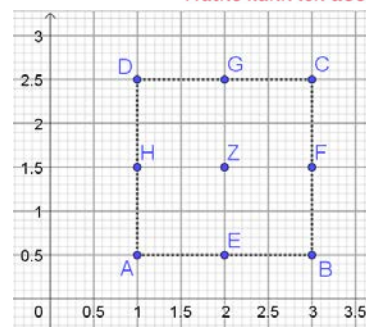
Der Charme der Figur der Aufgabe Flächeninhalt 2 liegt darin, dass diese keine einzige Strecke enthält. Die beiden Figuren der Aufgaben Flächeninhalt 1 und 2 sind formal-geometrisch stark verwandt. Die zweite entsteht aus der ersten durch das Ansetzen von jeweils zwei Halbkreisen oben und unten. Dies fällt möglicherweise zunächst nicht so stark auf, weil sich inhaltlichen Assoziationen wie z.B. „Vase“ und „Wappen“ gedanklich in der Vordergrund drängen.

Figur 3:

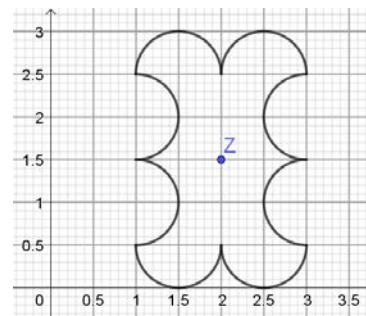
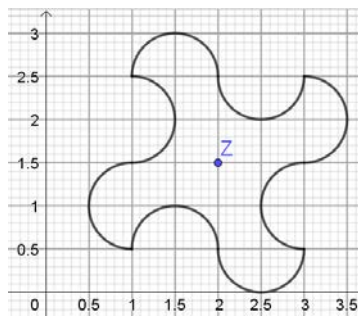
Gesucht ist eine zum Mittelpunkt Z des Quadrates ABCD punktsymmetrische Figur (Abbildung rechts).

Zeichne dazu acht Halbkreise zu den Strecken AE, EB, BF, usw. und zwar vier ins Quadrat ABCD hinein, vier außerhalb.

Die Halbkreise innerhalb des Quadrates sollen sich nicht überschneiden.

**Figur 3 – Lösung:**

Es gibt bis auf Übereinstimmung durch Spiegelung und Drehung (Kongruenz) zwei Lösungen, vgl. die beiden Abbildungen rechts.

**Figur 3 – Kommentar:**

Die Figur links (Assoziationen „Tauben“, „Windrad“) ist sogar drehsymmetrisch zum Drehmaß 90° , die rechts (Assoziation „3-3-Zwillinge“) zweifach achsensymmetrisch.

Mehrfach symmetrische Figuren können einen ästhetischen Reiz ausstrahlen.

Figur 3 – Differenzierung:

Die Schülerinnen und Schüler können

- eine Lösung finden
- beide Lösungen finden
- begründen, warum es keine weiteren Lösungen geben kann (Beginne mit einem Halbkreis innerhalb des Quadrates. Für den benachbarten Halbkreis zur selben Strecke gibt es noch zwei Möglichkeiten: außen oder innen. Danach ist durch die Punktsymmetrie und die weiteren Vorgaben alles festgelegt.)

Fünferkette:

Eine Fünferkette besteht aus fünf Zahlen, die man auf die folgende Weise erhält:

Die ersten beiden Zahlen denkt man sich aus. Die dritte Zahl ergibt sich, indem man die ersten beiden Zahlen addiert. Die vierte Zahl ergibt sich, indem man die zweite und die dritte Zahl addiert. Die fünfte Zahl ergibt sich, indem man die dritte und die vierte Zahl addiert. Man bildet also immer die Summe der beiden Vorgänger.

Ein Beispiel:

- 1. Zahl: **4** | 2. Zahl: **7** | 3. Zahl: $4 + 7 = 11$ | 4. Zahl: $7 + 11 = 18$ | 5. Zahl: $11 + 18 = 29$.

Fridolin hat einen Trick entdeckt, wie er aus der 1. Zahl und der 2. Zahl einer Fünferkette die 5. Zahl direkt ausrechnen kann, ohne die 3. Zahl und die 4. Zahl zu berechnen.

Findest du den Trick auch?

Fünferkette – Lösung:

Die 5. Zahl ist das Doppelte der 1. Zahl plus das Dreifache der 2. Zahl.

Die Lösung erhält man ohne Zuhilfenahme von Variablen verallgemeinerungsfähig am Beispiel, indem man die Zahlterme der 3. Zahl, der 4. Zahl und der 5. Zahl nicht ausrechnet, sondern zusammenfasst.

1. Zahl: **4** | 2. Zahl: **7** | 3. Zahl: **4 + 7** | 4. Zahl: **7 + 4 + 7** | 5. Zahl: **4 + 7 + 7 + 4 + 7 = 2 · 4 + 3 · 7**

Fünferkette – Kommentar:

Mithilfe anderer Beispiele kann man die Lösung vermuten, die Begründung steht dann natürlich noch aus.

1. Zahl: 1 | 2. Zahl: 10 | 3. Zahl: $1 + 10 = 11$ | 4. Zahl: $10 + 11 = 21$ | 5. Zahl: $11 + 21 = 32$
 1. Zahl: 1 | 2. Zahl: 100 | 3. Zahl: $1 + 100 = 101$ | 4. Zahl: $100 + 101 = 201$ | 5. Zahl: $101 + 201 = 302$

Fußball-Turnier:

Zu einem kleinen Fußball-Turnier sind vier Mannschaften gemeldet. Jede Mannschaft spielt gegen jede andere.

a) Wie viele Spiele finden statt?

b) Kurz vor Turnierbeginn meldet sich noch eine fünfte Mannschaft. Der Turnierleiter überlegt, ob er sie zulassen soll. Wie viele Spiele würden hinzukommen?

Fußball-Turnier – Lösungen:

a) Wir nennen die vier Mannschaften A, B, C, und D und schreiben die möglichen Spiele systematisch auf:

AB AC AD
 BC BD
 CD

Es sind also 6 Spiele.

b) Mit der fünften Mannschaft E würden vier Spiele dazu kommen: AE, BE, CE, und DE.

Fußball-Turnier – Kommentar:

Strategie: alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“ und dabei beachten, dass AB und BA dasselbe Spiel ist.

Entre nous – allgemein: Wie viele Spiele sind es bei n Mannschaften?

Bzw. in der kombinatorischen Übersetzung:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Objekten 2 auszuwählen?

Bei n Mannschaften gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Spiele.

Fußball-Turnier – Differenzierung:

Neben dem systematischen Abzählen kann man je nach Leistungsfähigkeit und -bereitschaft der Lerngruppe auch noch weitere Teilaufgaben stellen und den Sachverhalt weiter strukturiert angehen:

c) Gesucht ist ein Zahlterm, mit dem man die Anzahl der Spiele bei 4 Mannschaften berechnen kann.

Die folgenden Überlegungen helfen dabei.

Die Tabelle (Abbildung rechts) zeigt alle möglichen Zweier-Kombinationen der Buchstaben von A bis D.

- Wie viele sind es?

- Wie viele muss man streichen, da eine Mannschaft nicht gegen sich selbst spielen kann?

- Wie viele der Zweierkombinationen bezeichnen dasselbe Spiel?

	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

Lösung:

Es sind $4 \cdot 4$ Zweierkombinationen.

Die vier Kombinationen in der Diagonale von links oben nach rechts unten (Abbildung rechts) muss man streichen, es bleiben $4 \cdot 4 - 4$ übrig.

Je zwei Kombinationen bezeichnen dasselbe Spiel, also gibt es $(4 \cdot 4 - 4) : 2 = 6$ Spiele.

	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

d) Wie lautet der Zahlterm mit dem man die Anzahl der Spiele bei 5; 6; 18 Mannschaften (= Bundesliga Vorrunde) berechnen kann?

Lösung:

Der Dreischritt der Überlegungen zum Aufbau des Zahlterms verläuft analog zu denen bei der Teilaufgabe c).

Bei 5 Mannschaften sind es $(5 \cdot 5 - 5) : 2 = 10$ Spiele.

Bei 6 Mannschaften sind es $(6 \cdot 6 - 6) : 2 = 15$ Spiele.

Bei 18 Mannschaften sind es $(18 \cdot 18 - 18) : 2 = 153$ Spiele.

Gänse und Schafe:

Auf einer Wiese sind Gänse und Schafe. Es sind insgesamt 30 Köpfe und 94 Beine. Wie viele Gänse und wie viele Schafe sind es?

Gänse und Schafe – Lösung:

Hier ist an eine Lösung durch „geschicktes“ (gemeint ist: systematisches) Probieren gedacht, nicht an eine Lösung mithilfe eines linearen Gleichungssystems (LGS).

1. Versuch: Wären es ausschließlich Schafe, also 30, kämen $30 \cdot 4 = 120$ Beine zusammen. Das sind zu viele Beine. Also sind es weniger Schafe.

2. Versuch: Wären es 15 Schafe und 15 Gänse, kämen $15 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = 90$ Beine zusammen. Das sind zu wenige Beine. Also sind es mehr Schafe.

3. Versuch: ...

Ein fortgeschrittener Gedanke wäre: „Ersetzt“ man ein Schaf durch eine Gans (die Gesamtzahl der Tiere bleibt also gleich), erhält man zwei Beine weniger. So kann man sich von einem Versuch zur Lösung „Vorwärtsarbeiten“.

Es sind 17 Schafe und 13 Gänse. Das sind 30 Tiere (Köpfe) und $17 \cdot 4 + 13 \cdot 2 = 94$ Beine.

G ... Anzahl der Gänse S ... Anzahl der Schafe

$$\text{LGS: } G + S = 30 \quad \wedge \quad 2 \cdot G + 4 \cdot S = 94 \quad \Leftrightarrow \quad G = 13 \quad \wedge \quad S = 17$$

Gänse und Schafe – Kommentar:

Das systematische – im Gegensatz zum planlosen – Probieren ist eine ganz wichtige **Strategie**.

Gewicht 1:

Mert sagt: „Ich wiege 28 kg und die Hälfte meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Mert?

Gewicht 1 – Lösung:

Der fehlende Teil ist wieder eine Hälfte, also sind 28 kg die Hälfte des Gewichts von Mert. Mert wiegt also $2 \cdot 28 \text{ kg} = 56 \text{ kg}$.

Gewicht 1 – Kommentar:

Eine kleine Skizze (**Strategie!**) kann helfen.

Gewicht 2:

Daniel sagt: „Ich wiege 28 kg und ein Drittel meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Daniel?

Gewicht 2 – Lösung:

Der fehlende Teil zu ein Drittel sind zwei Drittel, also sind 28 kg zwei Drittel des Gewichts von Daniel. Ein Drittel wären dann 14 kg. Daniel wiegt also $3 \cdot 14 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$.

Probe: Ein Drittel von 42 kg sind 14 kg, $28 \text{ kg} + 14 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$.

Gewicht 2 – Kommentar:

Eine kleine Skizze (**Strategie!**) kann helfen.

Man kann auch systematisch probieren (**Strategie!**):

- Angenommen Daniel wiegt 60 kg. Ein Drittel davon sind 20 kg. $20 \text{ kg} + 28 \text{ kg} = 48 \text{ kg}$, das passt nicht.
 - Angenommen Daniel wiegt 45 kg. Ein Drittel davon sind 15 kg. $15 \text{ kg} + 28 \text{ kg} = 43 \text{ kg}$, das passt nicht.
- Jetzt ist die Lösung nahe.
- Angenommen Daniel wiegt 42 kg. Ein Drittel davon sind 14 kg. $14 \text{ kg} + 28 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$, das passt.

Grabung:

Wenn Ingmar 1 Tag braucht, um ein Loch auszugraben, das 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter tief ist, wie viele Tage braucht er dann für ein Loch, das 3 Meter lang, 3 Meter breit und 3 Meter tief ist?

Grabung – Lösung:

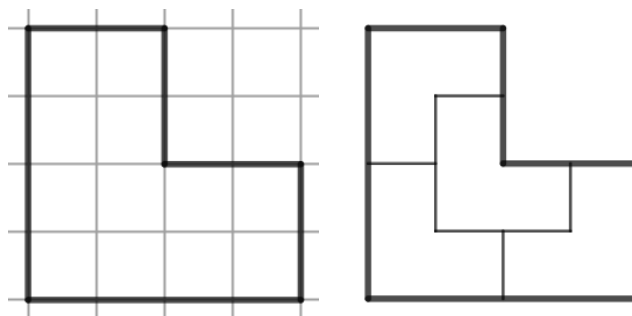
Nicht 3 Tage, sondern 27 Tage, wenn man hier von einer Proportionalität (1 m^3 pro Tag) ausgeht.

Grundstücke 1:

Ein hakenförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Teile (gleiche Größe und gleiche Form) aufgeteilt werden.

Grundstücke 1 – Lösung:

Rechte Abbildung – ohne unterlegtes Karogitter

**Grundstücke 1 – Kommentar:**

Stellt man die Aufgabe ohne unterlegtes Karogitter (dafür mit den Angaben „nur rechte Winkel, die kürzeren Strecken sind alle gleich lang.“), fällt das Auffinden der Lösung erfahrungsgemäß deutlich schwerer.

Für beide Fälle gilt:

Wenn man sich einmal von der Hoffnung verabschiedet hat, dass man mit der Rechtecksform hinkommt, liegt die Lösung „nahe“.

Mit Blick auf das Karogitter kann eine strukturelle Überlegung helfen (**Strategie:** Kann ich irgendetwas über die einzelnen Stücke sagen?):

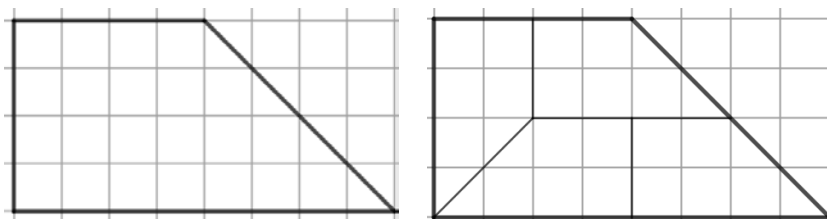
Insgesamt sind es 12 Karos, also muss jedes der vier Flächenstücke 3 Karos beinhalten. Wenn man keine Karos zerschneidet, gibt es nur zwei Möglichkeiten, das Rechteck und der „Haken“.

Grundstücke 2:

Ein trapezförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Trapeze aufgeteilt werden.

Grundstücke 2 – Lösung:

Rechte Abbildung

**Grundstücke 2 – Kommentar:**

Stellt man die Aufgabe ohne die Angabe der Art der vier deckungsgleichen Stücke („Trapeze“) wird es wesentlich schwieriger. Man wird dann wohl zunächst mit Dreiecken experimentieren, was aber nicht zum Ziel führt.

Mit Blick auf das Karogitter kann auch hier eine strukturelle Überlegung helfen (**Strategie:** kann ich irgendetwas über die einzelnen Stücke sagen?):

Insgesamt sind es 24 Karos, also muss jedes der vier Trapeze 6 Karos beinhalten.

Man kann auch sogar die Trapezform vorgeben, es bleibt immerhin noch die Frage nach der Lage der vier Trapeze.

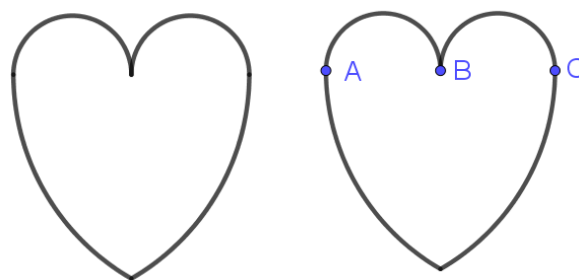
Herz:

Linke Abbildung: Wie wurde das „Herz“ gezeichnet?

Herz – Lösung:

Rechte Abbildung:

- Halbkreis um den Mittelpunkt der Strecke AB
- Halbkreis um den Mittelpunkt der Strecke BC
- Sechstel-Kreis um A mit dem Radius AC
- Sechstel-Kreis um C mit dem Radius AC

**Kamele:**

Ein alter Araber bestimmt vor seinem Tode, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite Sohn den dritten und der dritte Sohn den neunten Teil seiner Kamele erhalten soll. Da er 17 Kamele hinterließ, konnten sich die Söhne nicht einigen. Ein Derwisch, der mit einem alten Kamel vorbeikam, half ihnen und sagte: „Ich will euch mein Kamel leihen.“ Nun nahm jeder der Söhne von den 18 Kamelen seinen Teil, der erste Sohn 9 Kamele, der zweite Sohn 6 Kamele und der dritte Sohn 2 Kamele.

Damit waren 17 der 18 Kamele verteilt und der Derwisch zog mit seinem übrig gebliebenen Kamel weiter. Hier stimmt doch etwas nicht! Aber was?

Kamele – Lösung:

Die drei Teile, die der alte Araber seinen Söhnen bestimmt hat, geben zusammen kein Ganzes.

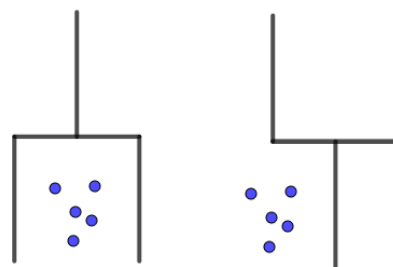
Es ist nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$. Damit bleibt beim Verteilen natürlich etwas übrig.

Kehrschaufel:

Vier Hölzer stellen eine Kehrschaufel dar, in der Schaufel liegt etwas Dreck – vgl. linke Abbildung. Lege zwei Hölzer so um, dass der Dreck außerhalb der Schaufel liegt.

Kehrschaufel – Lösung:

rechte Abbildung

**Kinder:**

Franjo und Gudrun sind zusammen 83 Jahre alt, Franjo ist 43 Jahre, Gudrun ist 40 Jahre alt. Ihre fünf Kinder sind zusammen 50 Jahre alt: Almut ist 3, Bert ist 7, Christine ist 11, Dora ist 13 und Emma ist 16 Jahre alt. In wie viel Jahren sind die Kinder zusammen genau so alt wie die Eltern zusammen?

Kinder – Lösung:

Das wird in 11 Jahren der Fall sein.

Zunächst ist vielleicht gar nicht klar, ob das irgendwann der Fall sein wird: die Kinder werden älter, die Eltern aber auch!

Ein erster Versuch mit z.B. „in 5 Jahren“ zeigt immerhin schon einmal, dass mit der Zeit der Abstand „schmilzt“:

Franjo: 48 Jahre, Gudrun 45 Jahre, zusammen 93 Jahre,

Almut 8, Bert 12, Christine 16, Dora 18 und Emma 21 Jahre, zusammen 75 Jahre.

Ein zweiter Versuch mit z.B. „in 10 Jahren“ zeigt dann, dass man sich schon in der Nähe der Lösung befinden muss.

Hier ist an die **Strategie** und Lösung durch „geschicktes“ (gemeint ist: systematisches) Probieren gedacht, nicht an eine Lösung mithilfe eines linearen Gleichungssystems (LGS).

A, B, C, D, E, F, G ... Alter von Almut, Bert, Christine, Dora, Emma, Franjo und Gudrun

J ... gesuchte Anzahl der Jahre

LGS: $A + B + C + D + E = 50$ $\wedge$ $F + G = 83$ $\wedge$ $A + B + C + D + E + 5 \cdot J = F + G + 2 \cdot J$ führt zu $J = 11$

Kinder – Differenzierung:

Die einzelnen Altersangaben der sieben Personen sind für das Probieren hilfreich, grundsätzlich aber überflüssig. Stellt man die Aufgabe ohne die einzelnen Altersangaben, wird sie deutlich abstrakter und damit schwieriger. Auch hier kann man systematisch probieren.

Zu einer analytischen Lösung führt die folgende Überlegung:

Pro Jahr werden die beiden Eltern zusammen 2 Jahre älter, die 5 Kinder zusammen aber 5 Jahre älter.

Pro Jahr verringert sich der Abstand also um 3 Jahre. Ein Abstand der beiden Summen von anfänglich 33 Jahren ist also in $33 : 3 = 11$ Jahren ausgeglichen.

Knöpfe:

In einer Familie sind sieben Söhne. Jeder Sohn hat sieben Hemden. Jedes Hemd hat sieben Knöpfe. Wie viele Knöpfe sind es insgesamt?

Knöpfe – Lösung:

Es sind $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ Knöpfe.

Knöpfe – Kommentar:

Dahinter steckt die so genannte *Produktregel der Kombinatorik* (nicht addieren!).

Konfetti:

Konrad hat ein farbiges Stück Papier und produziert Konfetti mit seinem Locher.

Konstanze sagt: „Das ist aber mühsam.“

Konrad sagt: „Ich habe das farbiges Papier dreimal gefaltet. So erhalte ich die dreifache Menge.“

Konstanze sagt: „Nein, das Papier liegt doch dann immer doppelt. Es ist also die sechsfache Menge.“
Wer hat Recht?

Konfetti – Lösung:

Beide haben nicht Recht. Faltet man ein Papier dreimal, so erhält man acht Lagen übereinander. Man erhält also die achtfache Menge bei jedem Lochvorgang.

Körper: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

- a) Ein geometrischer Körper hat acht Ecken und zwölf Kanten. Welcher könnte es sein?
- b) Ein geometrischer Körper hat fünf Ecken und acht Kanten. Welcher könnte es sein?
- c) Ein Rechteck rotiert schnell um eine seiner Seiten. Welcher Körper „entsteht“?

Körper – Lösung:

- a) Es könnte ein Quader sein.
- b) Es könnte eine quadratische Pyramide sein.
- c) Es „entsteht“ ein Zylinder.

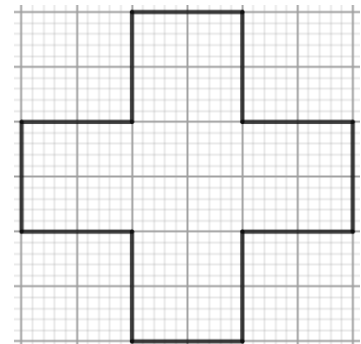
Körper – Kommentar:

Zu a) und b) Das kann man mit Prismen variieren.

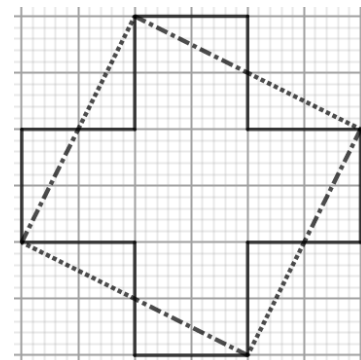
Zu c) Das kann man mit rechtwinkligen Dreiecken variieren.

Kreuz:

Schneide von dem Kreuz (linke Abbildung) vier gleiche Dreiecke ab und setze sie an anderer Stelle wieder so ein, so dass sich ein Quadrat ergibt.

**Kreuz – Lösung:**

Rechte Abbildung: schneide rechtwinklige Dreieck ab (Schnittlinie: Strich-Punkt), diese passen genau in die „Einbuchtungen“. Die Schnittlinie ist jetzt Teil des Quadrat-Randes (gepunktete Linie).



Kreuz – Differenzierung:

Schwierigere Aufgabenstellung: Schneide von dem Kreuz vier gleiche Teile ab und setze sie an anderer Stelle wieder so ein, so dass sich ein Quadrat ergibt.

Noch schwieriger: Schneide von dem Kreuz vier Teile ab und setze sie an anderer Stelle wieder so ein, so dass sich ein Quadrat ergibt.

Ganz schwierig: Zerschneide das Kreuz mit vier geraden Schnitten in fünf Teile und setze diese zu einem Quadrat zusammen.

Magische Quadrate 1:

Bei einem magischen 3x3-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ...; 9 so in die neun Felder einer 3x3-Matrix so einzutragen, dass die Summe der drei Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

Die magische Summe bei einem magischen 3x3-Quadrat kann man so bestimmen:

$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, zur Bestimmung der magischen Summe ist 45 also gleichmäßig auf drei Zeilen zu verteilen. Die magische Summe ist also $45 : 3 = 15$.

a) Linke Abbildung: Finde die restlichen Eintragungen des zugehörigen magischen 3x3-Quadrates.

b) Bestätige, dass sich tatsächlich ein magisches Quadrat ergeben hat.

Bemerkung: Es handelt sich hierbei um das so genannte Lo-Shu-Quadrat, das älteste bekannte magische Quadrat (2800 v. Chr., China).

	9		4	9	2
	5		3	5	7
8			8	1	6

Magische Quadrate 1 – Lösung:

a) Rechte Abbildung – ergänze Stück für Stück waagrecht, senkrecht oder diagonal zur magischen Summe 15 (**Strategie:** Vorwärtsarbeiten).

b) Zunächst ist zu bestätigen, dass tatsächlich die Ziffern von 1 bis 9 je einmal verwendet wurden.

Man kann dabei z.B. so verfahren, dass man von 1 bis 9 hochzählt und dann im magischen Quadrat die betreffende Ziffer einkringelt.

Schließlich ist zu bestätigen, dass sich bei allen Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen jeweils 15 ergibt. Das gelingt durch einfaches Nachrechnen.

Magische Quadrate 1 – Kommentar:

Beim Ausfüllen werden zur Bestimmung der sechs fehlenden Werte sechs der insgesamt acht Zeilen-, Spalten- bzw. Diagonalsummen verwendet. Dass sich bei einmaliger Verwendung aller vorgesehenen Ziffern die magische Summe dann auch für die restlichen beiden Summen einstellt, ist zunächst „offen“, man kann dies entweder im Beispiel nachrechnen oder im Falle je einer übrigen Zeilen- und Spaltensumme grundsätzlich direkt erkennen:

Wenn die Summe von zwei Zeilen jeweils 15 ist, muss die Summe der dritten ebenfalls 15 sein.

Wenn die Summe von zwei Spalten jeweils 15 ist, muss die Summe der dritten ebenfalls 15 sein.

Interessant ist in diesem Zusammenhang der folgende Sachverhalt:

Kommen die Ziffern von 1 bis 9 je einmal vor und haben alle drei Zeilen und Spalten die magische Summe, so folgt daraus nicht zwingend, dass sich auch bei den beiden Diagonalen die magische Summe einstellen muss, vgl. das Beispiel in der Abbildung rechts.

(Wie ist dieses nicht-magische 3x3-Quadrat entstanden? Ausgehend vom Lo-Shu-Quadrat wurden die Spalten zyklisch vertauscht.)

2	4	9
7	3	5
6	8	1

Magische Quadrate 1 – Differenzierung:

Dass es überhaupt magische Quadrate gibt, ist eigentlich eher erstaunlich. Wenn man jedenfalls auf „auf gut Glück“ zu suchen beginnt, wird man sich schon bei den 3x3-Quadraten schwer tun. Zum Ziel kommt man allerdings mit den folgenden drei aufeinander aufbauenden strukturellen Vorüberlegungen.

- Bei jedem magischen 3x3-Quadrat muss die Ziffer 5 in der Mitte stehen.

Beweis – mit den Bezeichnungen aus der Abbildung rechts:

1. Diagonale: $a + m + h = 15$ und 2. Diagonale: $c + m + f = 15$

2. Zeile: $d + m + e = 15$

Summe dieser drei Gleichungen: $a + d + f + c + e + h + 3 \cdot m = 45$ (*)

1. Spalte: $a + d + f = 15$ und 3. Spalte: $c + e + h = 15$

Durch Einsetzen in die Summengleichung (*) ergibt sich $m = 5$.

- Dass die Ziffer 9 (und damit natürlich auch die Ziffer 1) dann nicht in einer Ecke stehen kann, ergibt sich direkt durch Ausprobieren.
- Dass die Ziffer 8 (und damit natürlich auch die Ziffer 2) dann immer in einer Ecke stehen muss, ergibt sich auch direkt durch Ausprobieren.

a	b	c
d	m	e
f	g	h

Alle weiteren magischen 3x3-Quadrate ergeben sich damit durch Positionierung der 9 und der 8. Man erhält diese auch aus dem Lo-Shu-Quadrat durch Spiegelung oder Drehung. Im Wesentlichen gibt es also nur ein magisches 3x3-Quadrat.

Eine mögliche weitere Teilaufgabe lautet:

c) Bei magischen 3x3-Quadraten steht die Ziffer 5 immer in der Mitte, die Ziffer 8 immer in einer Ecke und die Ziffer 9 nie in einer Ecke. Findest du damit noch weitere magische 3x3-Quadrate?

In der Abbildung unten sind alle acht magischen 3x3-Quadrate abgebildet.

4	9	2	2	9	4	8	1	6	6	1	8
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3
8	1	6	6	1	8	4	9	2	2	9	4

8	3	4	6	7	2	2	7	6	4	3	8
1	5	9	1	5	9	9	5	1	9	5	1
6	7	2	8	3	4	4	3	8	2	7	6

Magische Quadrate 2:

Bei einem magischen 4x4-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ... ; 16 so in die 16 Felder einzutragen, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

Es ist $1 + 2 + 3 + \dots + 16 = 136$, zur Bestimmung der magischen Summe ist 136 also gleichmäßig auf vier Zeilen zu verteilen. Die magische Summe bei einem 4x4-Quadrat ist also $136 : 4 = 34$.

a) Linke Abbildung:

Finde die restlichen Eintragungen des zugehörigen magischen 4x4-Quadrates.

b) Bestätige, dass sich tatsächlich ein magisches Quadrat ergeben hat.

16			
	10	11	
9	6		
4	15		1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Magische Quadrate 2 – Lösung:

a) Rechte Abbildung – mithilfe der magischen Summe kann man sich ohne weitere Überlegungen Stück für Stück zur Lösung vorwärtsarbeiten.

b) Es ist zu prüfen:

Kommen alle Zahlen von 1 bis 16 je einmal vor (von 1 bis 16 hochzählen und einkringeln)?

Ergibt sich bei allen Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen jeweils 34 (nachrechnen, zumindest bei den „noch nicht verwendeten“ Spalten, Zeilen und Diagonalen)?

Magische Quadrate 2 – Differenzierung:

Die Schülerinnen und Schüler könnten die magische Summe auch selbst bestimmen.

Auch auf die Eintragung der Ziffer 9 kann man verzichten. Sie lässt sich erschließen. Die Aufgabe wird dann allerdings ein bisschen schwieriger.

Lösung hierzu: Mithilfe der magischen Summe 34 füllt man das 4x4-Quadrat so lange aus, bis in der linken und in der rechten Spalte in der Mitte noch zwei Eintragungen fehlen. Man hat dann noch die Zahlen 5; 8; 9 und 12 übrig. In der linken Spalte fehlen zur magischen Summe noch 14, das ist nur mit der 5 und 9 zu bewerkstelligen. Die 9 kann nicht oben stehen, weil in der 2. Zeile dann noch eine 4 nötig wäre, die ist aber schon eingetragen.

Magische Quadrate 2 – Kommentar:

Das oben abgebildete magische 4x4-Quadrat findet sich in Melencolia 1, einem berühmten Kupferstich von Albrecht Dürer (1514).

Unterscheidet man magische 4x4-Quadrate, die durch Spiegelung und Drehung auseinander hervorgehen nicht, so gibt es immerhin 880 (!) Stück.

Magische Quadrate 3:

Bei einem magischen 5x5-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ... ; 25 so in die 25 Felder einzutragen, dass die Summe der fünf Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

Es ist $1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 325$, zur Bestimmung der magischen Summe ist 325 also gleichmäßig auf fünf Zeilen zu verteilen. Die magische Summe bei einem 5x5-Quadrat ist also $325 : 5 = 65$.

a) Linke Abbildung: Finde die restlichen Eintragungen des zugehörigen magischen 5x5-Quadrates.

b) Bestätige, dass sich tatsächlich ein magisches Quadrat ergeben hat.

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Magische Quadrate 3 – Lösung:

- a) Rechte Abbildung – mithilfe der magischen Summe kann man sich ohne weitere Überlegungen Stück für Stück zur Lösung vorwärtsarbeiten.
- b) Es ist zu prüfen:
 Kommen alle Zahlen von 1 bis 25 je einmal vor (von 1 bis 25 hochzählen und einkringeln)?
 Ergibt sich bei allen Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen jeweils 65 (nachrechnen, zumindest bei den „noch nicht verwendeten“ Spalten, Zeilen und Diagonalen)?

MiniMax:

Verwende jede der angegebenen Ziffern je einmal.

- a) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistellige Zahlen, deren Summe möglichst klein ist.
- b) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistellige Zahlen, deren Differenz möglichst nahe bei 0 ist.
- c) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 4 und 8 zwei zweistellige Zahlen, deren Quotient möglichst groß ist.
- d) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistellige Zahlen, deren Produkt möglichst groß ist.

MiniMax – Lösungen:

- a) $14 + 23 = 13 + 24 = 37$... Die beiden kleinen Ziffern sind als Zehnerziffern zu verwenden.
- b) $31 - 24 = 7$... Dass die Zehnerziffern Nachbarzahlen sein sollten, ist wohl bald klar. Dass es aber optimalerweise die 2 und die 3 sein sollten, erkennt man eventuell erst nach einigem Ausprobieren.
- c) $84 : 12 = 7$... Der Dividend muss möglichst groß sein, der Divisor möglichst klein.
- d) $41 \cdot 32 = 1312$... Dass die beiden großen Ziffern als Zehnerziffer verwendet werden sollten, ist wohl bald klar. Dass aber $41 \cdot 32 (=1312)$ größer ist als $42 \cdot 31 (=1302)$, ist doch eine ziemlich erstaunliche Erkenntnis.

MiniMax – Kommentar:

zu d) Entre nous –

wir beschränken uns zunächst auf natürliche Zahlen mit einer Differenz von mehr als 1:

Ein Produkt „wird größer“, wenn man den größeren Faktor um 1 verringert und den kleineren Faktor um 1 vergrößert. Ggf. kann man diesen Prozess mehrfach anwenden und damit sagen, dass das Produkt größer wird, wenn man die beiden Zahlen „gleichermaßen aufeinander zubewegt“.

Mit $a - b > 1$ ist also: $(a - 1) \cdot (b + 1) > a \cdot b$ und zwar wegen $(a - 1) \cdot (b + 1) = a \cdot b + a - b - 1$.

Ganz allgemein gilt für $x > 0$:

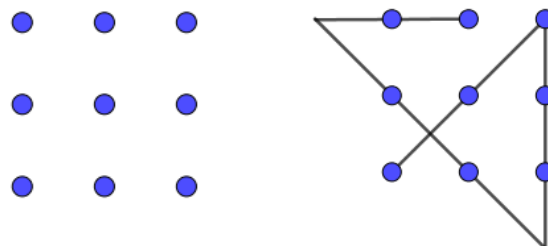
$$(a - x) \cdot (b + x) = a \cdot b + a \cdot x - b \cdot x - x^2 > a \cdot b \Leftrightarrow a \cdot x - b \cdot x - x^2 > 0 \Leftrightarrow a > b + x.$$

Geometrische Interpretation der Ungleichung

$(a - x) \cdot (b + x) > a \cdot b$ für positive a, b und x mit $a > b + x$:

Verkleinert man die größere Seite a und vergrößert die kleinere Seite b eines Rechtecks um denselben Betrag, so vergrößert sich sein Flächeninhalt. Man „bewegt“ sich damit zum Quadrat hin. Dies ist unter den Rechtecken mit gleichem Umfang (bei dieser Operation ist ja $a + b$ bzw. $2 \cdot a + 2 \cdot b$ konstant) bekanntermaßen das flächengrößte.

Neun Punkte: Neun Punkte – vgl. linke Abbildung – sollen mit einem zusammenhängenden, aus vier Teilen bestehenden Streckenzug verbunden werden. Kein Punkt darf zweimal von dem Streckenzug erfasst werden.



Neun Punkte – Lösung: rechte Abbildung

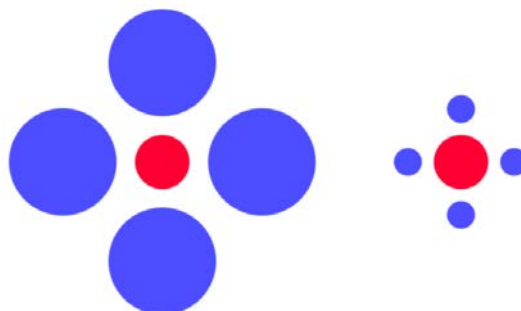
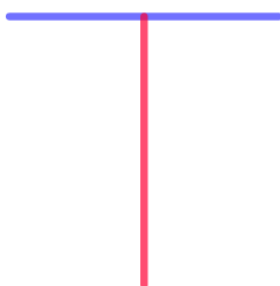
Neun Punkte – Kommentar: Man muss (!) über die Zeichnung (metaphorisch: über den Tellerrand!) hinausgehen.

Optische Täuschungen:

a) Welche Strecke ist länger, die Strecke AB oder die Strecke BC?

b) Welche Strecke ist länger, die rote (senkrecht) oder die blaue (waagrecht)?

c) Welcher rote Kreis in der Mitte ist größer, der linke oder der rechte?



Optische Täuschungen – Lösungen:

a) Die beiden Strecken sind gleich lang (nachmessen!). AB erscheint länger wegen der nach außen gerichteten Pfeilspitzen.

b) Die beiden Strecken sind gleich lang (nachmessen!). Die waagerechte Strecke erscheint kürzer, weil Sie durch den Endpunkt der senkrechten Strecke geteilt wird.

c) Die beiden Kreise in der Mitte sind gleich groß (nachmessen!). Der rechte Kreis erscheint größer, weil er von kleineren Kreisen umgeben ist.

Optische Täuschungen – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können über die Erklärungen, s.o. Vermutungen anstellen.

Im Internet findet sich eine Vielzahl von Beispielen für optische Täuschungen. Die Beschäftigung damit ist reizvoll, eröffnet aber auch den Weg zu einer tieferen Erkenntnis:

Nicht alles ist so, wie es auf den ersten Blick aussieht.

Für den Geometrieunterricht markiert diese Erkenntnis den Übergang von der propädeutischen in die deduktive Phase des Begründens und Beweisens.

Plus-Zeichen:

Setze zwischen die Ziffern der Zahl 987654321 Plus-Zeichen so, dass als Summe 99 entsteht.

Plus-Zeichen - Lösungen:

1. Lösung: $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$

2. Lösung: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$

Plus-Zeichen - Kommentar:

Der Anfang muss $9 + 8 + 7$ lauten, sonst kommt man zwangsläufig über die 99 hinaus.

Als **Tipp** für die erste Lösung könnte man abgeben: Verwende sieben Plus-Zeichen, bei den Summanden ist also eine zweistellige Zahl dabei.

Als **Tipp** für die zweite Lösung könnte man abgeben: Verwende sechs Plus-Zeichen, bei den Summanden sind also zwei zweistellige Zahlen dabei.

Plus-Zeichen - Varianten:

Es gibt beliebig viele Varianten zu dieser Aufgabe, z.B.: Setze zwischen die Ziffern der Zahl 88.888.888 Plus-Zeichen so, dass als Summe 1000 entsteht (Lösung: $888 + 88 + 8 + 8 + 8$).

Vielleicht können Sie bzw. dann auch Ihre Schülerinnen und Schüler auch selbst solche Aufgaben erfinden? Das ist nicht so schwer wie es vielleicht scheint, denn Sie bestimmen die Regeln ☺ - welche Ziffern und wie viele, welche Zeichen, welches Ergebnis.

Weitere Beispiele:

- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 5.555.555.555 Plus- oder Minus-Zeichen so, dass als Ergebnis 1000 entsteht (Lösung: $555 + 555 - 55 - 55$). Möglicher **Tipp**: ein Plus-, zwei Minuszeichen.
- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 44.444.444 Plus- oder Mal-Zeichen so, dass als Ergebnis 100 entsteht (Lösung: $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4$). Möglicher **Tipp**: drei Plus-, vier Minuszeichen.
- Mit den Zeichen $+$ $-$ $*$ $:$: $222 = 6$ $333 = 6$ $555 = 6$ $666 = 6$ $777 = 6$
(Lösungen: $2 + 2 + 2 = 6$; $3 \cdot 3 - 3 = 6$; $5 + 5 : 5 = 6$; $6 + 6 - 6 = 6$; $7 - 7 : 7 = 6$)

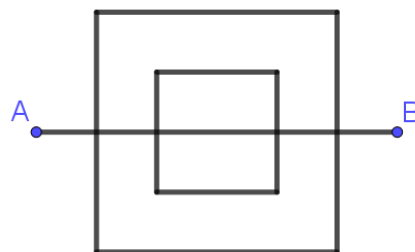
Postbote:

Der Postbote möchte seinen Bezirk (vgl. Abbildung) von A nach B in einem Zug durchlaufen und keine Strecke zweimal begehen.

Postbote – Lösung:

Hier wird jeweils beschrieben, wie der Postbote sich z. B. der Reihe nach an Kreuzungen entscheidet, es gibt mehrere Lösungen:

links / rechts / rechts / links / rechts / links / links / rechts

**Primzahlen:**

Von dem Hobby-Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH (1690 – 1764) stammt die Vermutung:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

Bis heute weiß man nicht, ob diese Vermutung zutrifft. Gesichert ist sie mit Computerhilfe jedenfalls für die Zahlen bis $4 \cdot 10^{18}$.

a) Schreibe alle geraden Zahlen zwischen 30 und 50 als Summe zweier Primzahlen.

b) Schreibe 44 auf alle möglichen Arten als Summe zweier Primzahlen.

Primzahlen – Lösungen:

a) z.B. $30 = 11 + 19$ $32 = 3 + 29$ $34 = 11 + 23$ $36 = 17 + 19$
 $38 = 7 + 31$ $40 = 3 + 37$ $42 = 5 + 37$ $44 = 13 + 31$
 $46 = 17 + 29$ $48 = 11 + 37$ $50 = 19 + 31$

b) $3 + 41$; $7 + 37$; $13 + 31$

Primzahlen – Kommentar:

a) Die Schülerinnen und Schüler sollten aus der Klasse 5 den Primzahlbegriff und die Primzahlen bis 40 kennen.

Man kann den Begriff wiederholen und die Liste zunächst aufschreiben lassen:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 39; 41; ...

b) **Strategie:** alle Möglichkeiten mit System durchgehen, das heißt hier: die Primzahlreihe einfach der Reihe nach durchgehen und prüfen, ob der ergänzende Summand wieder eine Primzahl ist.

Primzahlen – noch ein Kommentar:

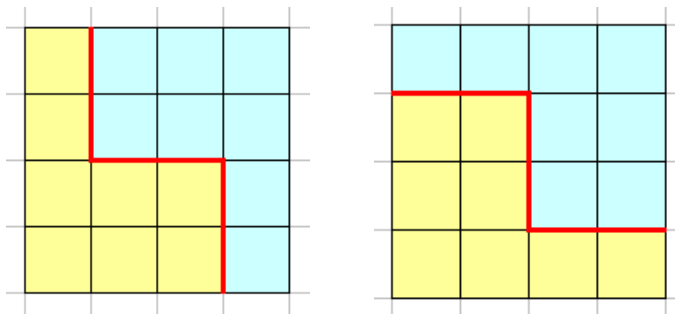
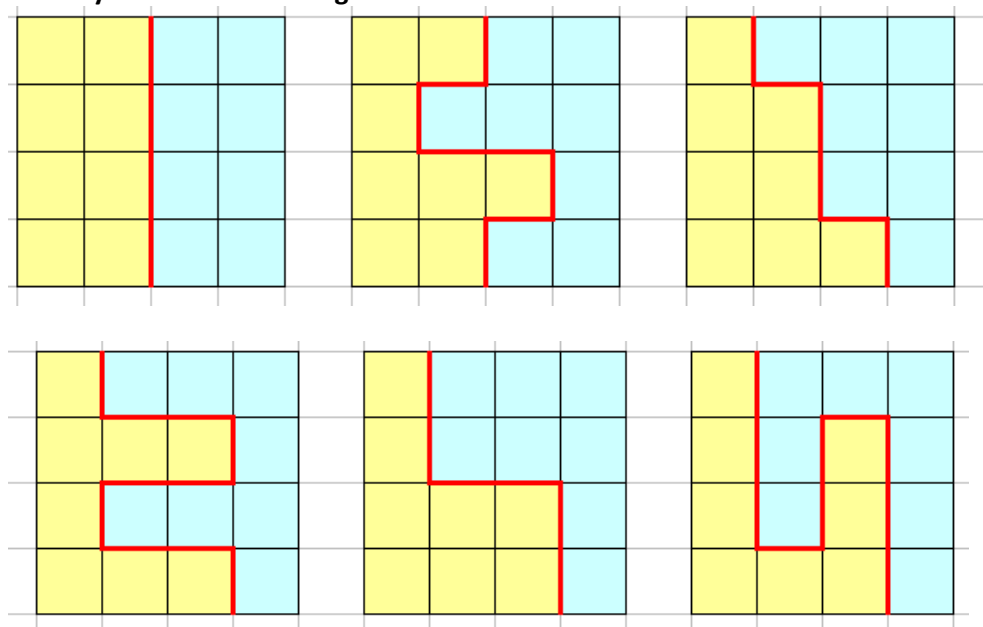
Wie sieht es mit den ungeraden Zahlen aus?

Der russische Mathematiker WINOGRADOW bewies 1937 den Satz:

Jede ungerade Zahl, die größer als 5 ist, kann als Summe dreier Primzahlen geschrieben werden.

Punktsymmetrisch:

Teile das Quadrat durch einen Streckenzug entlang der Gitterlinien in zwei Teile auf, die zum Mittelpunkt des Quadrates punktsymmetrisch sind. Färbe die beiden Teile unterschiedlich. Lösungen die deckungsgleich sind (gleiche Form und Größe haben) sollen als gleich gelten – vgl. die beiden gezeigten Beispiele.

**Punktsymmetrisch – Lösungen:****Punktsymmetrisch – Differenzierung:**

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jede(r) kann auf seinem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen – zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Arbeitsblatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden
- mehrere Lösungen finden
- alle sechs Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Beim Probieren kann man erkennen, dass der teilende Streckenzug punktsymmetrisch zur Quadratmitte sein muss (das ist ein möglicher **Tipp** bzw. eine mögliche Vorgabe). Die Frage ist also: Wie kommt man also zur Quadratmitte ohne den Rand oder den bisherigen Streckenzug zu berühren?

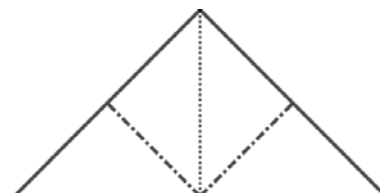
Ein darauf aufbauendes systematisches Vorgehen hängt jetzt nur noch vom Startpunkt ab. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten: eine Seitenmitte oder eine Mitte zwischen Seitenmitte und benachbartem Eckpunkt.

Quadrate:

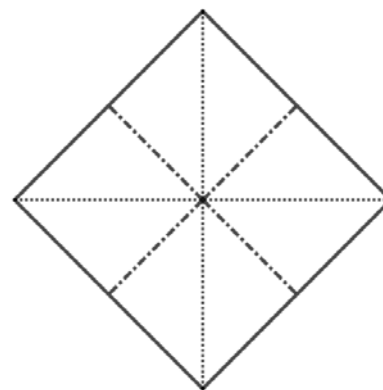
- a) Aus einem Papier in der Form eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks soll durch einen einzigen geraden Schnitt ein Quadrat des halben Flächeninhalts ausgeschnitten werden. Man darf das Papier vor dem Schnitt einmal falten.
- b) Ein quadratisches Stück Papier soll durch einen geraden Schnitt in vier gleich große Quadrate zerlegt werden. Man darf das Papier vor dem Schnitt zweimal falten.

Quadrate – Lösungen:

- a) Abbildung rechts: Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse gefaltet. Das wiederum rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse geschnitten. Es ergeben sich ein Quadrat und zwei halbe Quadrate. (gepunktet ... Faltlinie; Strich-Punkt ... Schnittlinie)



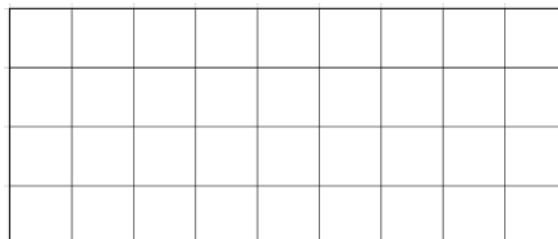
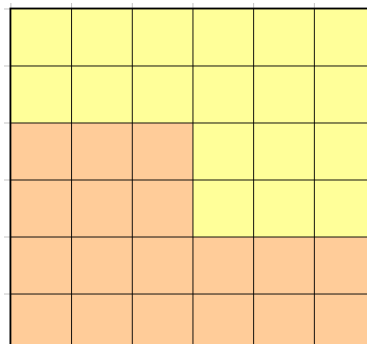
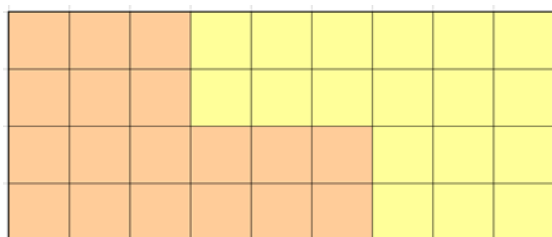
- b) Abbildung rechts: Das Quadrat wird entlang einer Diagonale gefaltet. Das entstandene rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse gefaltet. Das wiederum rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse geschnitten. Es ergeben sich vier gleich große Quadrate. (gepunktet ... Faltlinie; Strich-Punkt ... Schnittlinie)

**Quadrate – Kommentar:**

Die Aufgabe a) ist der „Steigbügelhalter“ für die Aufgabe b), deren Ergebnis schon erstaunlich ist.

Rechteck:

Das Rechteck – vgl. Abbildung rechts – soll entlang der Gitterlinien so in zwei deckungsgleiche Teile auseinander geschnitten werden, dass diese beiden Teile zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können.

**Rechteck – Lösung:**

Rechteck – Kommentar:

Diese Knobelaufgabe sieht vielleicht einfach aus, ist es aber nicht.

Die 36 Karos des Ausgangsrechtecks führen zu einem 6x6-Quadrat (**Strategie:** Sammle Informationen, die aus der Aufgabenstellung gefolgert werden können). Dies könnte ein Fingerzeig dafür sein, den Schnitt bei der unteren Seite des Rechtecks von links aus gesehen nach 6 Karos zu beginnen und wegen der Deckungsgleichheit der beiden Teile in der oberen Zeile von links aus gesehen nach 3 Karos zu beenden.

Rechteck – Differenzierung:

Die Formulierung der Aufgabe oben wählt einen mittleren Schwierigkeitsgrad. Lässt man die Informationen „entlang der Gitterlinien“ und „zwei deckungsgleiche Teile“ weg, wird es schwieriger. Fügt man noch Informationen über den Schnittverlauf hinzu, z.B. „Der Schnitt verläuft entlang von drei Strecken, die erste ist senkrecht zur zweiten, die zweite ist senkrecht zur dritten.“, wird es einfacher.

Richtig oder falsch? (Begründung oder Gegenbeispiel)

- a) Immer wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann hat es einen rechten Winkel.
- b) Immer wenn ein Viereck vier rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.
- c) Bei jedem Rechteck halbieren die Diagonalen die Eckwinkel.
- d) Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.
- e) Für zwei natürliche Zahlen a und b ist a^b immer dasselbe wie b^a .

Richtig oder falsch? – Lösungen:

- a) offensichtlich falsch – geeignete Zeichnung
- b) falsch; es könnte auch ein Rechteck mit unterschiedlichen Seitenlängen sein
- c) falsch; man denke sich ein sehr langes und wenig breites Rechteck
- d) richtig; die beiden freien Schenkel wäre dann ja parallel, sie würden sich nicht in einem Dreieckspunkt schneiden
- e) falsch; Gegenbeispiel $3^2 = 9$ ist nicht $2^3 = 8$.

Richtig oder falsch? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Durchdringung von Sachverhalten und auf viele Themen anwendbar.

Rollende Körper:

Ein Körper liegt auf einer Ebene und wird angestoßen.

- a) Er rollt gerade aus.
- b) Er rollt im Kreis.

Um welchen Körper könnte es sich handeln?

Rollende Körper – Lösungen:

- a) ein Zylinder, eine Kugel
- b) ein Kegel, ein Kegelsumpf

Römische Zahlzeichen:

Rechnungen mit römische Zahlzeichen kann man z.B. mit Streichhölzern „legen“ – jeder Strich in den Zeichen +, -, = oder I, V, X mit einem Holz.

Welches Holz muss man umlegen, damit die Rechnung stimmt?

a)

$$XI - II = XII$$

b)

$$X + IV = V$$

c)

$$X + V - II = VII$$

d)

$$VI + VIII = XII$$

e)

$$XII - II = XV + VI$$

f)

$$X - II = XV + VI$$

Römische Zahlzeichen – Lösungen:

a)

$$X + II = XII$$

b)

$$X - IV = VI$$

c)

$$X - V + II = VII$$

d) (mehrere Möglichkeiten)

$$IV + VIII = XII$$

e) (mehrere Möglichkeiten)

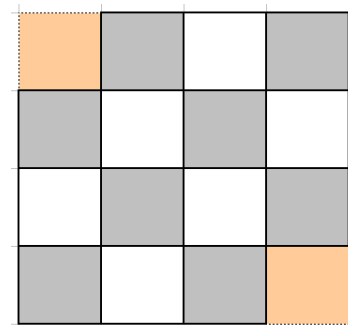
$$XII - III = XV - VI$$

f)

$$VI + IV = X$$

Schachbrett:

Aus einem kleinen 4x4-Schachbrett mit 16 Feldern sind das linke obere und das rechte untere Eck-Feld herausgesägt (vgl. Abbildung). Wie ann man dieses mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer zwei benachbarte Felder ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

**Schachbrett – Lösung:**

Nein, das geht nicht. Ein Dominostein deckt immer gleichzeitig ein weißes und ein graues Feld ab. Es gibt bei unserem ausgesägten Schachbrett aber acht graue und nur sechs weiße Felder.

Schachbrett – Kommentar:

Strategie: Einen Sachverhalt beim Ausprobieren erkennen.

Hier: es bleiben für den siebten Dominostein immer zwei schwarze Felder übrig.

Schachbrett – Differenzierung:

Die Lehrkraft kann einen **Tipp** abgeben oder die Aufgabe gleich zu Beginn so stellen:

... Kann man dieses mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer *ein weißes und ein schwarzes Feld* ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

Schaltjahre:

In einem Jahr dreht sich die Erde einmal um die Sonne. Diese Zeitdauer beträgt nicht genau 365 Tage, sondern etwas mehr, nämlich 365 Tage, 5 Stunden und etwa 48 Minuten. Deshalb wird alle 4 Jahre – nämlich wenn die Jahreszahl durch 4 teilbar ist – mit dem 29. Februar ein so genannter Schalttag eingeschoben. Weil es nicht genau 6 Stunden mehr als 365 Tage sind, sondern nur 5 Stunden und etwa 48 Minuten, fällt das Schaltjahr manchmal aus und zwar dann, wenn die Jahreszahl durch 100 teilbar ist. Um den Kalender noch genauer an die Umlaufdauer der Erde um die Sonne anzupassen, fällt das

Schaltjahr doch nicht aus (!), wenn die Jahreszahl nicht nur durch 100, sondern auch durch 400 teilbar ist.

Welche Jahre sind Schaltjahre?

- a) 2019 b) 1984 c) 1762 d) 1900 e) 2000 f) 2200 g) 2400

Schaltjahre – Lösungen:

- a) 2019 – ist als ungerade Zahl nicht durch 4 teilbar, also kein Schaltjahr
 b) 1984 – ist durch 4 teilbar, da 84 durch 4 teilbar ist, also ein Schaltjahr
 c) 1762 – ist nicht durch 4 teilbar, da 62 nicht durch 4 teilbar ist, also kein Schaltjahr
 d) 1900 – ist durch 100, aber nicht durch 400 teilbar, also kein Schaltjahr (Ausnahme!)
 e) 2000 – ist durch 100 und durch 400 teilbar, also ein Schaltjahr (Ausnahme der Ausnahme!)
 f) 2200 – ist durch 100, aber nicht durch 400 teilbar, also kein Schaltjahr (Ausnahme!)
 g) 2400 – ist durch 100 und durch 400 teilbar, also ein Schaltjahr (Ausnahme der Ausnahme!)

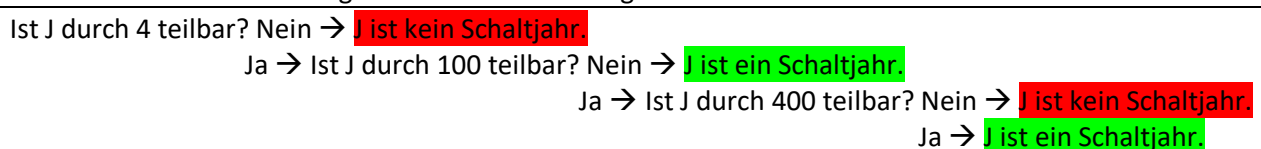
Schaltjahre – Kommentar:

Die Lösungen sind mit Hilfe des Begriffs „Ausnahme“ vermittelnd formuliert. Formal korrekt lautet die Schaltjahr-Bedingung wie folgt.

Ein Jahr J ist genau dann ein Schaltjahr, wenn gilt:

J ist durch 4, aber nicht durch 100 teilbar oder J ist durch 400 teilbar.

Der Sachverhalt lässt sich algorithmisch als Flussdiagramm darstellen:



Schätzfragen:

Wie viel wiegt das?

- a) Ein DIN A4 Blatt normales Papier (= 80 g/m²)
 b) Das Schulbuch Lambacher Schweizer 6 (Klett 2016)
 c) Ein Päckchen Papiertaschentücher (10 Stück, normale Größe)
 d) Eine 2 € Münze
 e) Eine DVD

Schätzfragen – Lösungen:

- a) 5 g
 b) 616 g
 c) 26 g
 d) 8,5 g
 e) 15 g

Schätzfragen – Kommentar:

Schätzfragen eignen sich als Wettspiel zum Stundenabschluss: wer am besten geschätzt hat, bekommt einen (kleinen) Preis.

Weitere Anregungen:

- Welchen Flächeninhalt hat die Tafel?
- Wie hoch ist das Klassenzimmer?
- Wie hoch ist der Tisch? usw. (Ein Zollstock gehört sowieso zur Grundausrüstung jedes Mathematiklehrers ☺.)

- Wie viel Liter Wasser passen in einen (Erwachsenen-)Fußball?
Dieser soll laut FIFA einen Umfang zwischen 68,5 cm und 70 cm haben. Rechnet man wegen der Materialdicke mit einem Umfang von 68 cm, so kommt man auf ein Volumen von etwa 5,3 Liter (!).

Schöne Ergebnisse:

Es ist $12.345.679 \cdot 9 = 111.111.111$ (ausrechnen lassen – das ist eine schöne Überraschung ☺).

Mit welcher Multiplikationsaufgabe erhält man als Ergebnis 222.222.222 und 333.333.333 und 444.444.444 usw.?

Schöne Ergebnisse – Lösungen:

$$\begin{aligned}
 12.345.679 \cdot 9 \cdot 2 &= 12.345.679 \cdot 18 \\
 &= 111.111.111 \cdot 2 = 222.222.222 \\
 12.345.679 \cdot 9 \cdot 3 &= 12.345.679 \cdot 27 \\
 &= 111.111.111 \cdot 3 = 333.333.333 \\
 12.345.679 \cdot 9 \cdot 4 &= 12.345.679 \cdot 36 \\
 &= 111.111.111 \cdot 4 = 444.444.444 \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Schulfest:

Du sollst für ein Gewinnspiel beim Schulfest 100 Preise für insgesamt 20 € einkaufen.

Einige Hauptgewinne: Schokoladentafeln für 1,00 €, ein paar zweite Preise: Erdnussbeutel für 0,50 € und viele Trostpreise: kleine Gummibärchentüten für 0,10 €.

Beachte dabei:

- Die Anzahl der Gummibärchentüten muss ein Vielfaches von 5 sein.
- Die Anzahl der Gummibärchentüten muss größer als 75 sein.

a) Findest du eine Möglichkeit für den Einkauf – für genau 100 Preise genau 20,00 € ausgeben?

b) Findest du noch eine weitere Möglichkeit?

c) Begründe warum die Anzahl der Gummibärchentüten ein Vielfaches von 5 sein muss.

d) Begründe, warum die Anzahl der Gummibärchentüten größer als 75 sein muss.

Schulfest – Lösungen:

Anzahl der Gummibärchentüten G	Anzahl der Erdnussbeutel E	Anzahl der Schokoladentafeln S
75 → 7,50 €	25 → 12,50 €	0 → 0,00 €
80 → 8,00 €	16 → 8,00 €	4 → 4,00 €
85 → 8,50 €	7 → 3,50 €	8 → 8,00 €
90 → 9,00 €	-2 → -1,00 €	12 → 12,00 €

a) und b): Vgl. Tabelle. Die Kombination mit 75 Gummibärchentüten und 25 Erdnussbeutel, aber ganz ohne Schokoladentafeln passt nicht so recht zum Aufgabentext.

c) Die Anzahl der Gummibärchentüten muss ein Vielfaches von 5 sein, weil man sonst mit den beiden anderen Preisen 0,50 € und 1,00 € nicht genau auf 20,00 € kommen kann.

d) Wählt man 75 Gummibärchentüten benötigt man 7,50 €. Man braucht noch 25 Preise. Kauft man 25 Erdnussbeutel benötigt man 12,50 €. Dann hat man schon genau 20,00 € verbraucht und noch keine einzige Schokoladentafel. Davon sollten aber einige dabei sein. Kauft man statt einiger Erdnussbeutel die teureren Schokoladentafeln kommt man nicht mit 20,00 € aus. Dasselbe gilt für 70 oder weniger Gummibärchentüten.

Formale Herleitung (entre nous):

Gesucht sind Zahlentripel (S, E, G) mit ganzzahligen Einträgen von mindestens 2 (von allen Preisarten soll nach dem Aufgabentext ein Plural vorkommen!), die dem linearen Gleichungssystem (LGS)

$$S + E + G = 100 \wedge S \cdot 1 + E \cdot 0,5 + G \cdot 0,1 = 20 \text{ genügen.}$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung, so führt dies zum LGS

$$S + E + G = 100 \wedge E \cdot 0,5 + G \cdot 0,9 = 80 \Leftrightarrow S = 100 - E - G \wedge E = 160 - 1,8 \cdot G.$$

Man kann diese beiden Gleichungen im dreidimensionalen S-E-G-Raum geometrisch als zwei Ebenen interpretieren und ihre Schnittgerade bestimmen oder – ohne geometrische Interpretation – eben nur

eine vektorielle Parameterdarstellung wählen:
$$\begin{pmatrix} S \\ E \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 160 \\ 0 \end{pmatrix} + G \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ -1,8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $S \geq 2$ ist $-60 + 0,8 \cdot G \geq 2$ bzw. $G \geq 77,5$.

Wegen $E \geq 2$ ist $160 - 1,8 \cdot G \geq 2$ bzw. $G \leq 87\frac{7}{9}$.

Aufgrund der Ganzzahligkeit von S, E und G kommen für G zusätzlich nur Vielfache von 5 in Frage.

Damit sind zwei Werte für G möglich: 80 und 85, durch Einsetzen ergeben sich die beiden Lösungen, s.o.

Schulfest – Kommentar:

Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler ist hier natürlich wieder an eine Lösung durch „geschicktes“ (gemeint ist: systematisches) Probieren gedacht, nicht an eine Lösung mithilfe eines linearen Gleichungssystems.

Nach den Vorgaben der Aufgabenstellung wird man z.B. mit $G = 80$ anfangen. Dann hat man 8,00 € ausgegeben und benötigt noch 20 Preise. Für 10 Erdnussbeutel benötigt man noch 5,00 € und für 10 Schokoladentafeln 10,00 €. Das sind dann 100 Preise, aber insgesamt hätte man 23,00 € ausgegeben, also zu viel.

Also: weniger von den teuren Schokoladentafeln. Z.B. 15 Erdnussbeutel für 7,50 € und 5 Schokoladentafeln für 5,00 €. Insgesamt hätte man jetzt 20,50 € ausgegeben. Damit ist die Lösung nicht mehr weit.

Man kann ausgehend vom ersten Ansatz mit jeweils 10 Erdnussbeuteln und 10 Schokoladentafeln auch den Betrag von 23,00 € Schritt für Schritt reduzieren, indem man eine Schokoladentafel durch einen Erdnussbeutel „ersetzt“.

Wieder liegt eine selbstdifferenzierende Aufgabe vor, die Schülerinnen und Schüler können:

- eine Lösung finden (a))
- mehrere Lösungen finden (b))
- systematische Überlegungen begründen (c) und schwierig: d))

Relevante Strategien:

- überlege vorab, ob man das Suchfeld für die Lösung eingrenzen kann
- mache ein Beispiel
- probiere davon ausgehend systematisch

Seerosen:

Ein sagenhafter Teich wächst in 10 Tagen mit Seerosen zu. Jeden Tag verdoppelt sich die zugewachsene Fläche. Wann ist der Teich zur Hälfte mit Seerosen bedeckt?

Seerosen – Lösung:

Nicht nach fünf Tagen – die intuitive Grundvorstellung irgendeines Zusammenhang zwischen Größen ist die Proportionalität – sondern nach neun Tagen. Warum?

Die Fläche verdoppelt sich Tag zu Tag, sie war also am Vortag halb so groß.

Seerosen – Kommentar:

Zur Not kann die Lehrkraft den Sachverhalt mit konkreten Größen erläutern.

Am 10. Tag z.B.: 8 ha, am 9. Tag: 4 ha.

Spaghetti:

Mariam kocht Spaghetti, Kochzeit fünf Minuten. Mariam stehen zwei Sanduhren zur Verfügung. Die erste braucht genau vier Minuten um ganz durchzulaufen, die zweite genau drei Minuten. Wie kann Mariam mit Hilfe dieser beiden Sanduhren die Kochzeit abmessen?

Spaghetti – Lösungen:

Mariam setzt die Spaghetti auf und lässt beide Sanduhren gleichzeitig laufen. Wenn die 3-Minuten-Sanduhr durchgelaufen ist, dreht sie sie um. Nach vier Minuten, wenn die 4-Minuten-Sanduhr fertig ist, dreht sie die 3-Minuten-Sanduhr noch mal um und hat so noch die letzte Minute. Insgesamt hat sie die Spaghetti dann 5 Minuten gekocht.

Die Lehrkraft kann **Tipps** geben:

- Man kann beide Sanduhren gleichzeitig laufen lassen.
- Man kann eine Sanduhr umdrehen, bevor sie abgelaufen ist.

Spiegelung: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

- a) Spiegle ein Dreieck an seiner längsten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?
- b) Spiegle ein rechtwinkliges Dreieck an seiner kürzesten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

Spiegelung – Lösungen:

- a) Ein Drachenviereck
- b) Ein gleichschenkliges Dreieck

Stimmt's?

- a) Eine Million hat neun Nullen.
- b) 1 Meter sind 100 Millimeter.
- c) 1 Ar sind 100 Quadratmeter.
- d) 1 Liter sind 100 Kubikzentimeter.
- e) Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a \cdot b$.
- f) Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a + b$.
- g) Null Komma neun plus null Komma zehn ist null Komma neunzehn.
- h) Eine Tonne sind 1000 Gramm.
- i) 1 plus 2 mal 3 plus 4 ist 5.

Stimmt's? – Lösungen:

- a) falsch, es sind 6 Nullen
- b) falsch, es sind 1000 Millimeter
- c) richtig
- d) falsch, es sind 1000 Kubikzentimeter
- e) richtig
- f) falsch, der Umfang berechnet sich zu $2 \cdot (a + b)$
- g) eher falsch, wenn man null Komma zehn versteht als 0,10, das ist eben eine ungute Sprechweise
- h) falsch, es sind 1000 Kilogramm
- i) falsch, es ergibt sich 11 (die Regel *Punkt vor Strich* beachten!)

Stimmt's? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Reaktivierung von Wissen.

Streichhölzer 1:

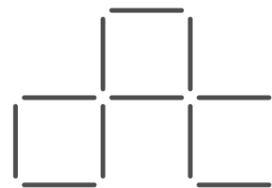
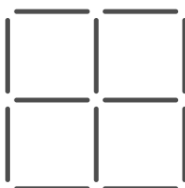
Nimm vier Streichhölzer weg, so dass zwei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 2:**

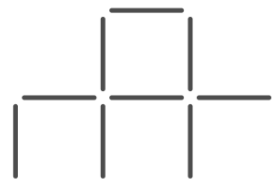
Lege drei Streichhölzer um, so dass nur noch drei Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 3:**

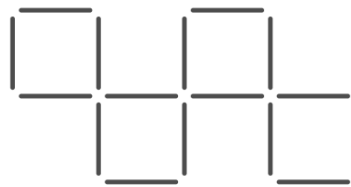
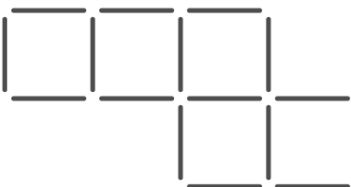
Nimm fünf Streichhölzer weg, so dass drei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 4:**

Lege zwei Streichhölzer um, so dass nur noch vier Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 1 - 4 Kommentar:**

Vergleicht man die Anzahl der vorhandenen Hölzer mit der Anzahl der zu bildenden Quadrate, so erkennt man in allen vier Fällen, dass für jedes Quadrat vier Hölzer „verbraucht“ werden müssen. Das bedeutet, dass die Quadrate keine gemeinsamen Seiten haben dürfen.

Summe:

Jonathan berechnet der Reihe nach die folgenden Summen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} =$$

- a) Rechne die Summen aus.
 b) Wann hat Jonathan die Zahl 1 erreicht?

Summe – Lösung:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

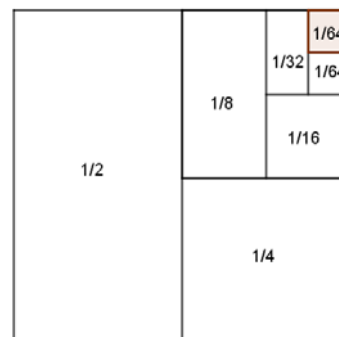
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

- b) Er erreicht die Zahl 1 nie. Es fehlt zur 1 jeweils immer noch einmal der letzte Summand der jeweiligen Summe.

Man kann diese Situation wie in der Abbildung gezeigt veranschaulichen.

**Summe – Kommentar:**

Voraussetzung ist hierbei, dass die Schülerinnen und Schüler Brüche addieren können.

Das ist schon bemerkenswert –

es kommt immer noch etwas dazu und doch wird die Zahl 1 nicht erreicht oder gar überschritten.

Teilbar 1:

- a) Schreibe alle dreistelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2 und 3 (jede Ziffer einmal) auf, die durch 4 teilbar sind.
 b) Schreibe alle dreistelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2 und 3 (jede Ziffer einmal), die durch 9 teilbar sind.
 c) Wie viele dreistelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2 und 3 (jede Ziffer einmal) gibt es?

Teilbar 1 – Lösungen:

- a) 132 und 312

b) Es gibt keine solchen Zahlen wegen der Quersummenregel für die 9. Es ist $1 + 2 + 3 = 6$, die Zahl 6 ist nicht durch 9 teilbar.

- c) Es sind 6 Stück.

Lösungsweg: Alle aufschreiben – aber mit System (**Strategie!**), damit man sicher sein kann, dass man alle hat.

Zum Beispiel der Größe nach:

Zuerst alle die mit 1 beginnen: 123 132

Dann die mit 2 beginnen: 213 231

Schließlich die mit 3 beginnen: 312 321

Teilbar 1 – Differenzierung:

Je nach Leistungsfähigkeit der Lerngruppe sind die folgenden weiteren Teilaufgaben denkbar.

- d) Wie viele vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2; 3 und 4 (jede Ziffer einmal) gibt es?

Nimm dir die sechs dreistelligen Zahlen (aus c)) vor und füge die Ziffer 4 an allen möglichen Stellen ein.

Lösung:

123 → 4123 1423 1243 1234 ... vier Möglichkeiten

132 → 4132 1432 1342 1324 ... vier Möglichkeiten usw.

Es gibt also $6 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

e) Wie viele fünfstelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 (jede Ziffer einmal) gibt es?

Nimm dir die 24 dreistelligen Zahlen (aus d)) vor und füge die Ziffer 5 an allen möglichen Stellen ein.

Lösung:

1234 → 51234 15234 12534 12354 12345 ... fünf Möglichkeiten usw.

Es gibt also $24 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten.

Teilbar 2:

Setze für ♣ und ♥ Ziffern ein, sodass die Zahl 123.♣56.78♥

a) durch 9 und durch 10

b) durch 5 und durch 9 teilbar ist

c) durch 4 und durch 9 teilbar ist

d) durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar ist

Teilbar 2 – Lösungen:

a) 123.456.780

Teilbarkeit durch 10: Endziffer 0

Teilbarkeit durch 9: die Quersumme muss durch 9 teilbar sein

b) 123.456.780 oder 123.856.785

Teilbarkeit durch 5: Endziffer 0 oder 5

Teilbarkeit durch 9: die Quersumme muss durch 9 teilbar sein, es gibt jeweils nur eine Möglichkeit

c) 123.456.780 oder 123.956.784 oder 123.556.788

Teilbarkeit durch 4: zur Zehnerziffer 8 die Endziffer 0 oder 4 oder 8

Teilbarkeit durch 9: die Quersumme muss durch 9 teilbar sein, es gibt jeweils nur eine Möglichkeit

d) 123156780 oder 123456780 oder 123756780

Wenn die Zahl durch 4 ist, dann ist sie automatisch auch durch 2 teilbar.

Teilbarkeit durch 5: Endziffer 0 oder 5

Teilbarkeit durch 4: zur Zehnerziffer 8 die Endziffer 0 oder 4 oder 8

Damit ist als Endziffer nur die 0 möglich.

Teilbarkeit durch 3: die Quersumme muss durch 3 teilbar sein, es gibt drei Möglichkeiten

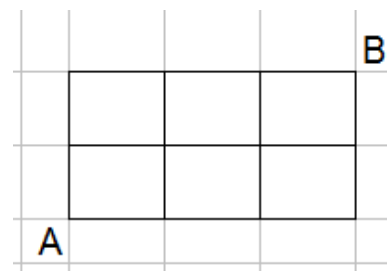
Teilbar 2 – Kommentar:

Dies ist eine selbstdifferenzierende Aufgabe:

- finde eine Lösung - finde alle Lösungen - begründe, dass es keine weiteren Lösungen gibt

Viele Wege:

Wie viele Wege führen von A (links unten) nach B (rechts oben), wenn man nur auf den Gitterlinien gehen darf und keine Umwege machen möchte?



Viele Wege – Lösung:

Ein Weg lässt sich beschreiben durch eine Folge aus fünf Buchstaben, entweder „r“ (für „rechts“) oder „h“ (für „hoch“), wobei genau dreimal „r“ und genau zweimal „h“ vorkommen soll.

rrrh; rrrh; rrrh;

rhrrh; rhrrh; rhrrh;
 hrrrh; hrrrh; hrrrh;
 hrrrh

Es sind 10 Wege.

Viele Wege – Kommentar:

Strategie: alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“.

Der kreative Akt auf Schülerseite besteht hier aus dem Erfinden einer Systematik, z.B. in der Art der oben gezeigten.

Entre nous – allgemein gilt:

Ist R die Anzahl der möglichen „Rechts-Schritte“ und H die Anzahl der möglichen „Hoch-Schritte“, so ist die Anzahl der möglichen Wege gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{R+H}{R}$.

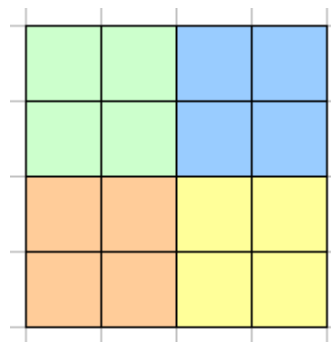
Begründung: In einem (R+H)-Tupel sind von den R+H Stellen R Stellen auszuwählen, die mit „r“ belegt werden, die übrigen werden dann mit „h“ belegt.

Vier gleiche Teile:

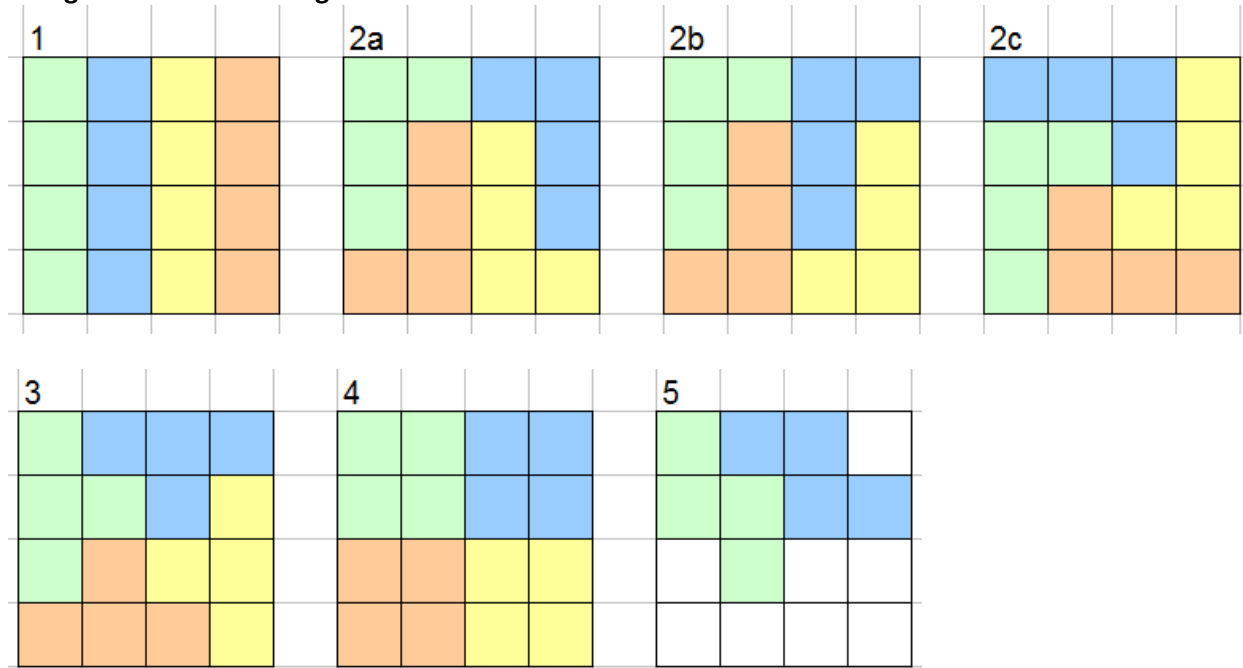
Teile das 4x4-Quadrat entlang der Gitterlinien in vier deckungsgleiche Teile (gleiche Form und Größe).

Färbe die vier gleichen Teile unterschiedlich.

Ein Beispiel zeigt die Abbildung rechts.



Vier gleiche Teile – Lösungen:



Vier gleiche Teile – Differenzierung:

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jeder kann auf seinem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen – zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Arbeitsblatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden - mehrere Lösungen finden - alle Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Jedes der vier Teile besteht aus vier kleinen Quadraten. Die Anzahl dieser „Vierlinge“ ist sehr begrenzt. Legt man drei Quadrate in eine Reihe und fügt ein viertes hinzu, so hat man drei Möglichkeiten: „I“, „L“ oder „T“ (vgl. in den Abbildungen oben 1; 2a, 2b, 2c und 3 – die Bezeichnungen mit Buchstaben sind der jeweiligen Form des Vierlings nachempfunden).

Will man eine 3er-Reihe vermeiden, so gibt es nur die Möglichkeiten „O“ (4) oder „N“ (5) – dieser Ansatz führt aber nicht zu einer Lösung.

Viereck 1:

Alle vier Seiten eines Vierecks sind gleich lang, es ist aber kein Quadrat. Kann das sein?

Viereck 1 - Lösung:

Ja, es ist eine Raute.

Viereck 2:

Die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks sind parallel, es ist aber kein Rechteck. Kann das sein?

Viereck 2 - Lösung:

Ja, es ist ein Parallelogramm.

Vier Töchter:

Eine Mutter hat 4 Töchter. Jede Tochter hat einen Bruder. Wie viele Kinder hat die Mutter insgesamt?

Vier Töchter - Lösung:

Die Mutter hat fünf Kinder, nämlich vier Töchter und einen Sohn (!).

Waageproblem 1:

Auf einem Tisch liegen 3 Stapel zu jeweils 3 Schokoladentafeln. Alle Tafeln wiegen 100g mit Ausnahme der Tafeln eines einzigen Stapels, die jeweils 110g wiegen.

Wie kann man durch eine einzige Wägung von Tafeln aus den Stapeln mit einer Anzeigen-Waage den Stapel mit den besonderen Tafeln sicher herausfinden?

Waageproblem 1 – Lösung:

Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln und vom 3. Stapel 3 Tafeln und legt alle 6 Tafeln zusammen auf die Waage. Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 600 g.

Wenn die Anzeige 610 g lautet, dann sind die 110 g- Tafeln im 1. Stapel, denn auf der Waage liegt eine davon.

Wenn die Anzeige 620 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 2. Stapel, denn auf der Waage liegen zwei davon.

Wenn die Anzeige 630 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 3. Stapel, denn auf der Waage liegen drei davon.

Waageproblem 1 – Kommentar:

Wenn man nur eine Tafel eines Stapels auf die Waage legt, kann man Glück haben und den Stapel identifizieren oder eben nicht, man soll aber ein sicheres Verfahren entwickeln.

Ein möglicher **Tipp** lautet:

Du darfst auch von einem Stapel mehrere Tafeln auf die Waage legen.

Wenn man von jedem Stapel eine Tafel auf die Waage legt, man wird immer 310 g erhalten, das hilft also nicht weiter. Aber jetzt ist die Lösung nicht mehr fern.

Waageproblem 2:

Von neun äußerlich gleichen Kugeln K1, K2 ... K9 ist genau eine schwerer als die acht andern. Diese soll sicher durch zwei Wägungen mit einer Balkenwaage gefunden werden.

Waageproblem 2 – Lösung:

Lege K1, K2 und K3 auf die linke Seite der Balkenwaage, lege K4, K5 und K6 auf die rechte Seite. Jetzt gibt es drei Möglichkeiten:

- Links schwerer: die gesuchte Kugel ist K1, K2 oder K3 → zweite Wägung: links K1, rechts K2 → bei Gleichgewicht ist K3 die gesuchte Kugel
- Rechts schwerer: die gesuchte Kugel ist K4, K5 oder K6 → zweite Wägung: links K4, rechts K5 → bei Gleichgewicht ist K6 die gesuchte Kugel
- Gleichgewicht: die gesuchte Kugel ist K7, K8 oder K9 → zweite Wägung: links K7, rechts K8 → bei Gleichgewicht ist K9 die gesuchte Kugel

Waageproblem 2 – Kommentar:

Man muss sich von der Idee verabschieden, die gesuchte Kugel eventuell schon nach dem ersten Wägen benennen zu können. Hier geht es **strategisch** gesehen um ein schrittweises Eingrenzen der Lösung. Ideal wäre, wenn man das mit einer Balkenwaage real durchspielen könnte.

Die Lehrkraft kann den **Tipp** geben, mit zweimal drei Kugeln zu beginnen.

Würfel:

(Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

27 gleiche Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt. Der große Würfel wird außen rot angemalt.

- a) Wie viele der 27 kleinen Würfel sind zur Hälfte rot angemalt?
- b) Wie viele der Würfel haben zwei rote Quadrate?
- c) Gibt einen gänzlich unbemalten Würfel?

Würfel – Lösungen:

- a) 8 Würfel sind zur Hälfte rot angemalt.
- b) 12 Würfel haben zwei rote Quadrate.
- c) Ja, es gibt einen, nämlich den in der Mitte.

Würfel – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können weitere solche Aufgaben erfinden, ggf. auch an einem 4x4x4-Würfel.

Würfelnetze:

Bei Spielwürfeln müssen gegenüberliegenden Augenzahlen zusammen immer 7 ergeben. Prüfe, ob die Würfelnetze korrekt beschriftet sind.

4	2	3		3	2			1	2			5	6			2			3	
	1				1	4			3				2			4	6	3	1	5
	5				5				5	6			1				5		4	6
a)	6			b)	6			c)	4			d)	4	3		e)	1		f)	2
1																				
2				5				2				3							1	
6	4			4	6	3		6	3			4	5					2	3	
	5				2				5	1			1						5	4
g)	3			h)	1			i)	4			j)	2	6				k)		6

Würfelnetze – Lösungen:

a); b); c); e); f); g); h) und i) sind korrekt beschriftet, d); j) und k) nicht.

Zahlwörter:

a) Für kleine Kinder ist es beim Lernen der Zahlwörter eine große Hürde, dass im Deutschen entgegen einer einheitlichen Systematik die Einerstelle vor der Zehnerstelle genannt wird. Das Zahlwort für 3456 ist „Dreitausendvierhundertsechsfünfzig“.

- Wie heißt das Zahlwort für 3456, wenn man die Stufenzahlen schön der Reihe nach abarbeiten würde (wie zum Beispiel im Englischen)?

b) Wir wollen versuchsweise zusätzlich nun auch die Sonderfälle der Zahlwörter für 11 („Elf“) und 12 („Zwölf“) abschaffen.

- Wie müssten sie heißen, wenn man sie genau so bildet wie bei 13; 14 usw.?
- Wie müssten sie heißen, wenn man die Stufenzahlen der Reihe nach abarbeitet – wie in a)?

c) Auch die Bildung der verschiedenen Zehner-Vielfachen (zwanzig, dreißig, ...) ist ein Sonderfall. Bei den größeren Stufenzahlen nennt man ja immer die Anzahl der Stufenzahl und dann die Stufenzahl selbst, z.B. bei 3400 sagt man „dreitausendvierhundert“.

Wir haben jetzt also nur noch Wörter für die Ziffern von 1 bis 9 und die Stufenzahlen zur Verfügung.

- Wie heißt das Zahlwort für 3456 jetzt?

d) Wir bilden die Zahlwörter nun nur mit den Ziffern von 1 bis 9 und den Stufenzahlen konsequent nach der Regel aus d) („Anzahl“+„Stufenzahl“). Wie sonst üblich, geben wir bei den Tausendern und Millionen usw. die Anzahlen mit einem Zahlwort zwischen 1 und 999 an.

- Wie würden die Zahlwörter heißen: 35 | 212 | 1.234 | 22.333 usw.

Beispiel:

987.654.321 als Zahlwort wäre dann

„neunhundertachtzehnsieben Millionen

sechshundertfünfehtausenddreihundertzweizehndeins“

Zahlwörter – Lösungen:

a) Es würde heißen „Dreitausendvierhundertfünfzigundsechs“.

b) Sie müssten heißen „einszehn“ und „zweizehn“.

Sie müssten heißen „zehndeins“ und „zehndzwei“.

c) Es heißt jetzt „dreitausendvierhundertfünfzehndsechs“.

Achtung: „Fünfzehn“ steht hierbei für 50, nicht mehr für 15.

d) dreizehndfünf

zweihunderteinszehndzwei

einstausendzweihunddreizehndvier

zweizehndzweitausenddreihunddreizehnddrei usw.

Zeichnerisches Multiplizieren:

Wie löst man die Multiplikationsaufgabe $32 \cdot 14$ durch eine Zeichnung, ohne das „kleine Einmal-Eins“?

Wir betrachten die Abbildung rechts.

Man zeichnet die Zahl 32 so:

3 dicke Parallelen und 2 dünne Parallelen in einem Abstand davon von links oben nach rechts unten.

Man zeichnet die Zahl 14 so:

1 dicke Gerade und 4 dünne Parallelen in einem Abstand davon von rechts oben nach links unten.

Jetzt zählt man die Schnittpunkte:

8 Schnittpunkte bei „dünn-dünn“ → **8 Einer**

$12 + 2 = 14 = 10 + 4$ Schnittpunkte bei „dünn-dick“ bzw. „dick-dünn“ → **4 Zehner** und 1 Übertrag

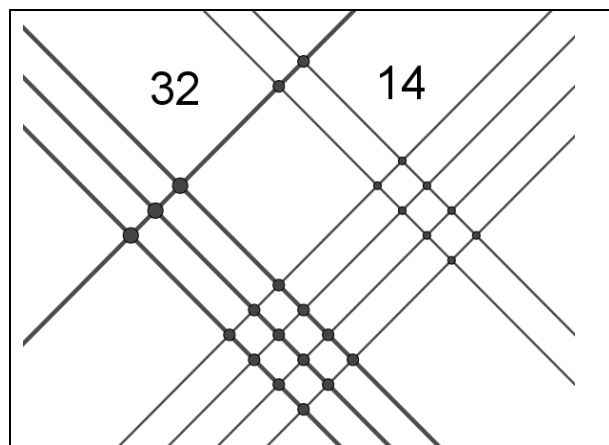
3 Schnittpunkte bei „dick-dick“ + 1 Übertrag → **4 Hunderter**

Ergebnis: $32 \cdot 14 = 448$

a) Führe dieses Verfahren durch für $45 \cdot 23$.

b) Gelingt dies auch für $123 \cdot 45$?

c) Vergleiche mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation.



Zeichnerisches Multiplizieren – Lösung:

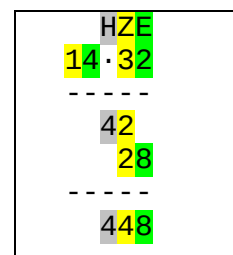
a) 1035

b) 5535

c) Es ist genau dasselbe wie bei der schriftlichen Staffelrechnung:

3 Zehner mal 4 Einer ergibt 12 Zehner, das sind 2 Zehner und 1 Hunderter,
 3 Zehner mal 1 Zehner ergibt 3 Hunderter, zusammen sind es also **4 Hunderter**,
 2 Einer mal 4 Einer ergibt **8 Einer** und 2 Einer mal 1 Zehner ergibt 2 Zehner,
 zusammen also **4 Zehner**.

Anstelle des Abzählens, wie viele Punkte die „Rechtecke“ enthalten, kann man natürlich das „Kleine Einmal-Eins“ verwenden.



Zeichnerisches Multiplizieren – Kommentar:

Man kann (mit weiteren Beispielen) eine Doppelstunde mit diesem Thema füllen, wenn man möchte ☺. Anstelle von dünnen und dicken Strichen wird man – insbesondere bei dreistelligen Faktoren – mit Farben arbeiten. Hier muss man schauen, dass man den Überblick über die Bedeutung der einzelnen „Rechtecke“ (Einer? Zehner? Hunderter? usw.) nicht verliert.

Wenn der Überblick gesichert ist, dann ist es unerheblich, ob man auf kariertem Papier und mit dem Geodreieck arbeitet oder auch auf Konzeptpapier freihand.

Zwei Liter:

Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hat das Volumen von genau 1 Liter ($= 1000 \text{ cm}^3$).

Welches Volumen bekommt man bei der doppelten Kantenlänge ($= 20 \text{ cm}$)?

Zwei Liter – Lösung:

Damit bekommt man nicht das doppelte Volumen von 2 Liter, sondern 8 Liter ($= 8000 \text{ cm}^3$).

Zwei Liter – Kommentar:

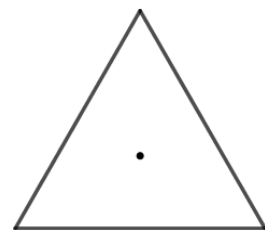
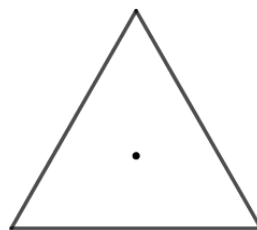
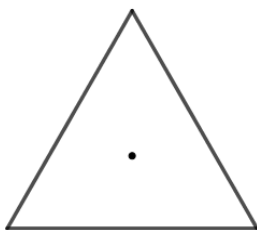
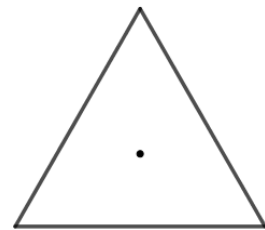
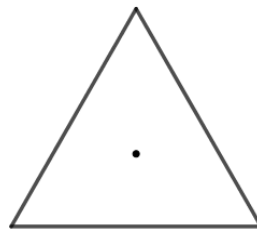
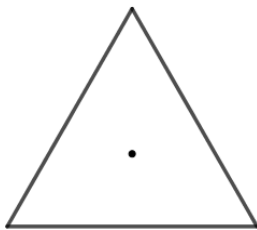
Oder in der Veranschaulichung („Kopfgeometrie“):

Wie viele 10 cm-Würfel passen in einen 20 cm-Würfel? Einer links vorne unten, einer rechts vorne unten, einer links hinten unten, ...

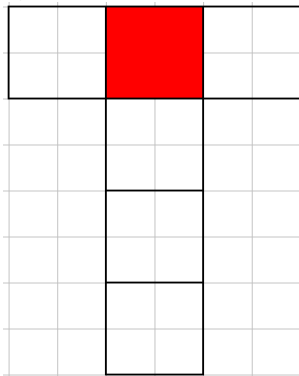
X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

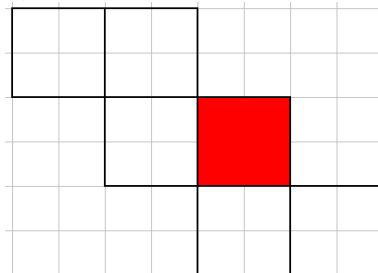
X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X



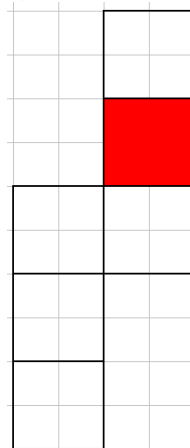
a)



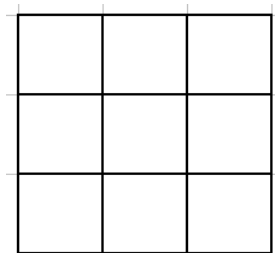
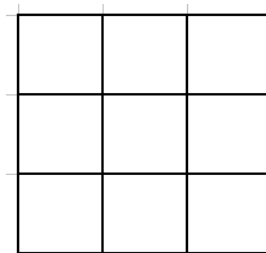
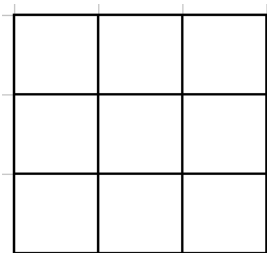
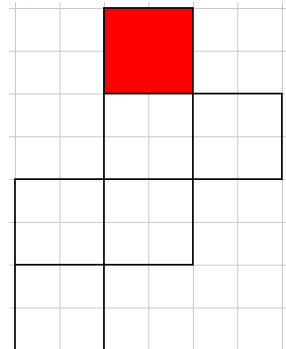
b)

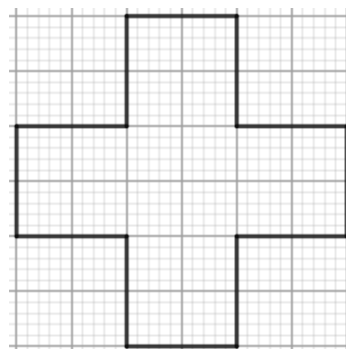
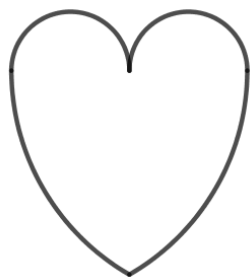
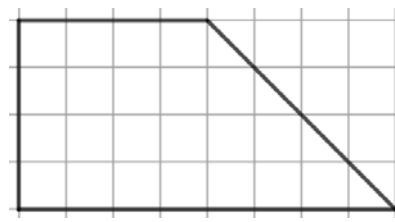
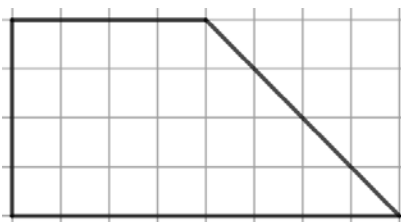
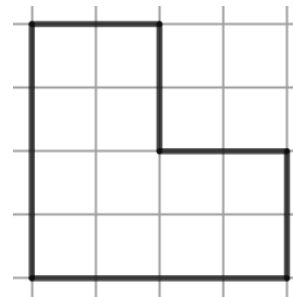
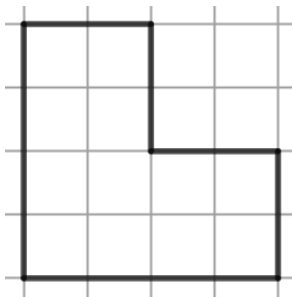
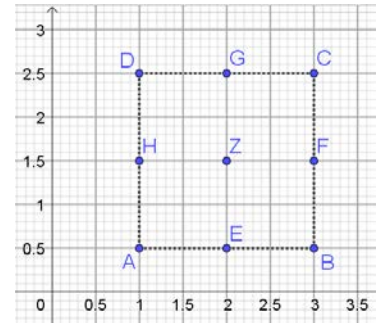
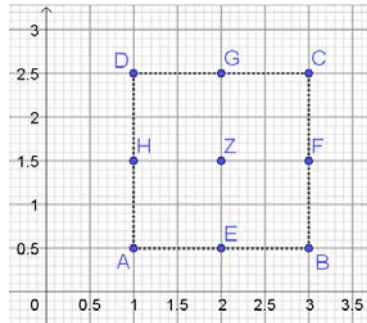
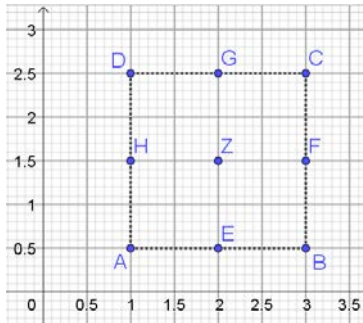
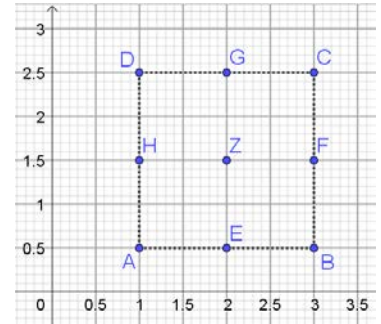
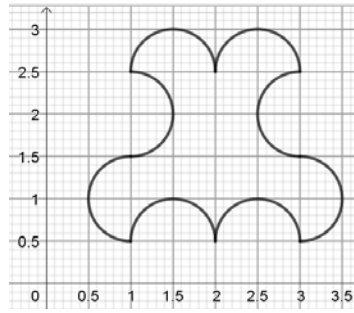
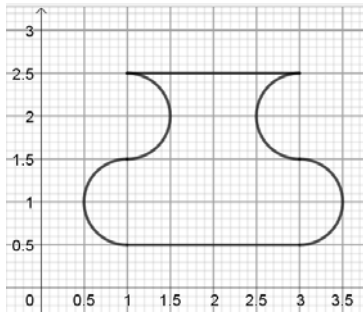


c)



d)

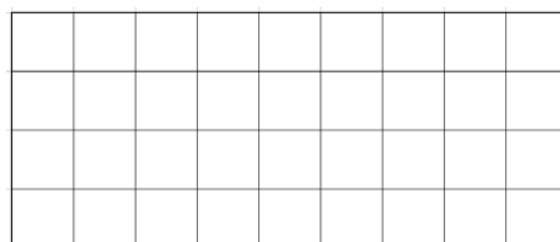
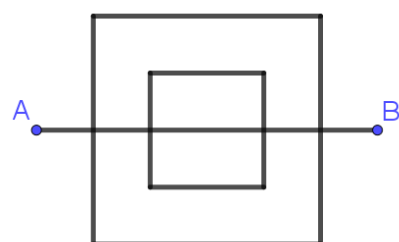
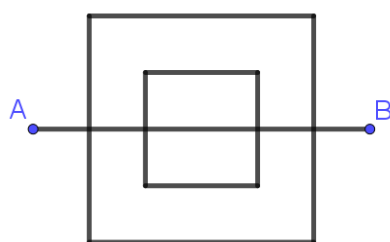
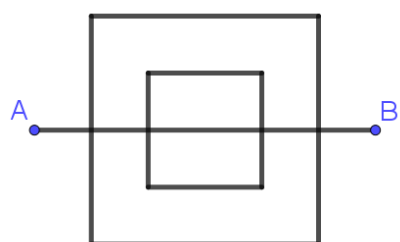
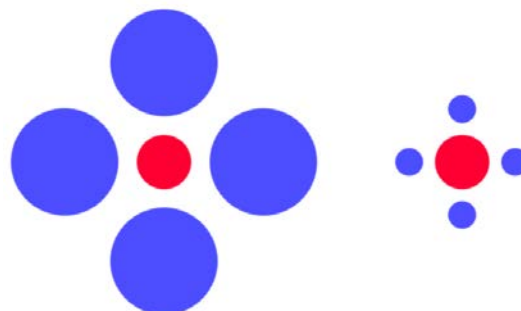
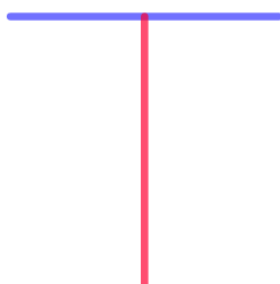
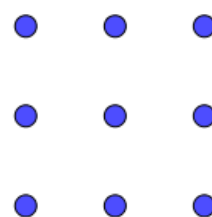
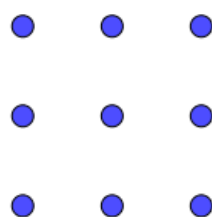
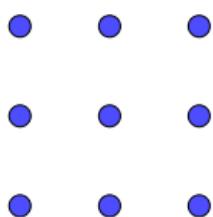




	9	
	5	
8		

16			
	10	11	
9	6		
4	15		1

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		



a)

b)

c)

$$XI - II = XII$$

d)

$$VI + VIII = XII$$

$$X + IV = V$$

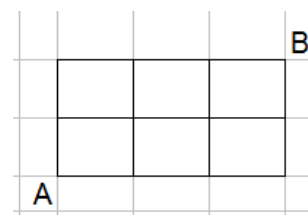
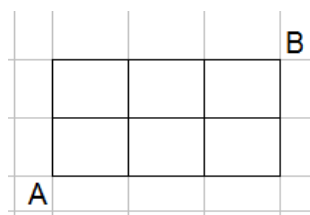
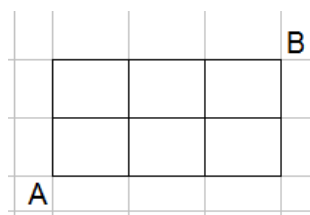
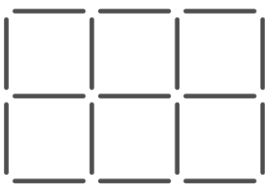
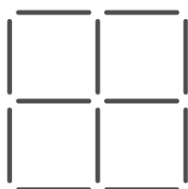
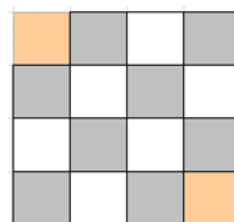
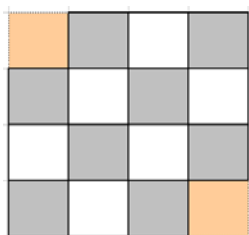
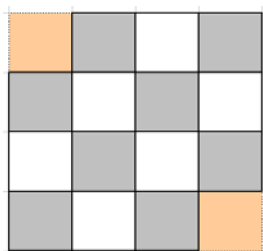
e)

$$XII - II = XV + VI$$

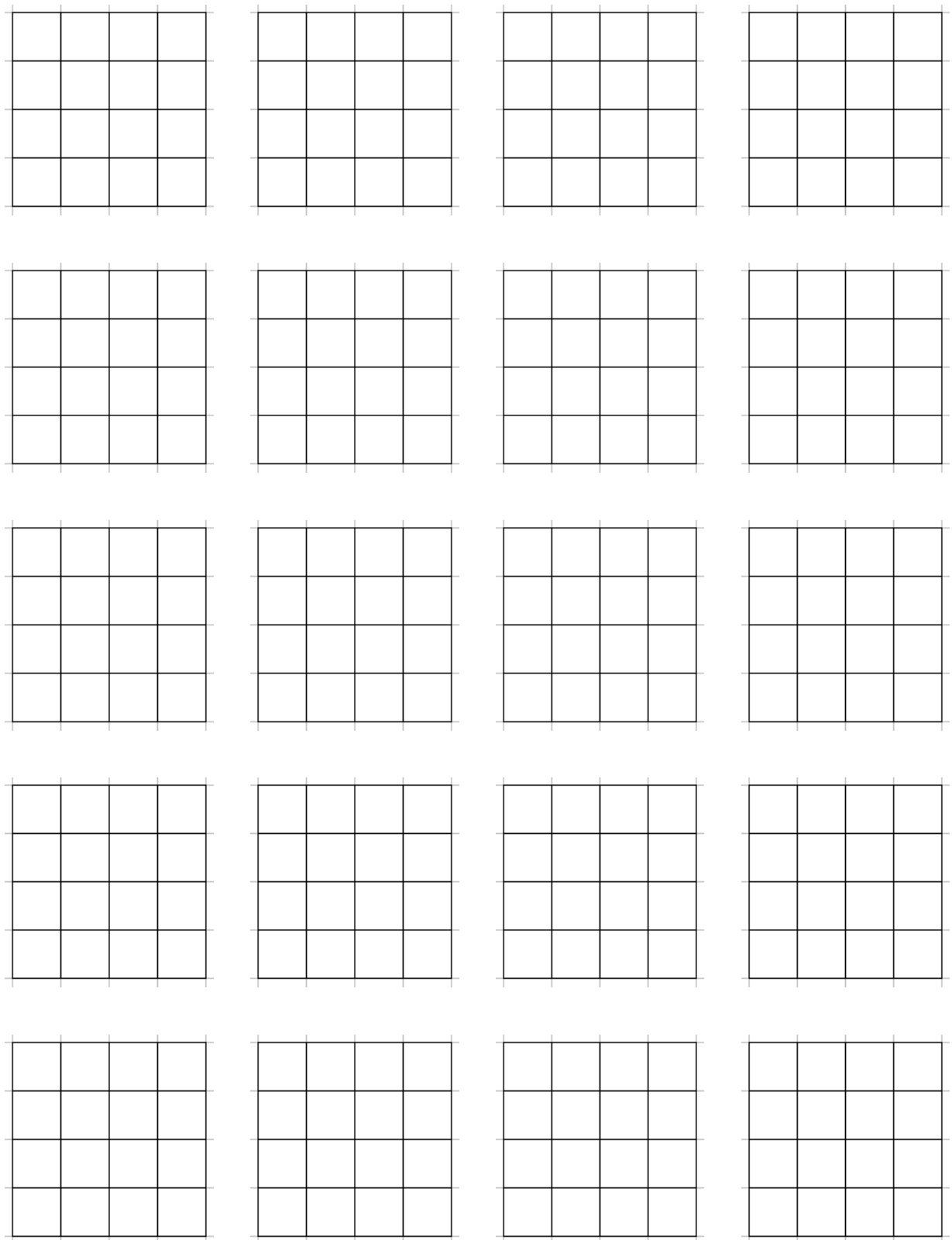
$$X + V - II = VII$$

f)

$$X - II = XV + VI$$



4	2	3		3	2			1	2			5	6			2				3		
	1				1	4			3				2			4	6	3		1	5	
	5				5				5	6			1				5				4	6
a)	6			b)	6			c)	4			d)	4	3		e)	1			f)	2	
1																						
2				5				2				3								1		
6	4			4	6	3		6	3			4	5						2	3		
	5				2				5	1			1								5	4
g)	3			h)	1			i)	4			j)	2	6					k)			6



Lehrerblatt

Die Knobelaufgaben-Sammlung umfasst etwa **100 Aufgaben** (Teilaufgaben sind einzeln gezählt) in drei Schwierigkeitsstufen, *einfach, **mittel und ***schwer – samt Lösungen und ggf. Kommentaren. Man darf den Begriff Knobelaufgabe hier gerne im weiteren Sinn verstehen. Trotzdem haben nicht wenige Aufgaben dieser Sammlung den typischen Knobelaufgaben-Clou. Einige der Knobelaufgaben haben auch die immanente Wiederholung von Stoffen aus Klasse 5 zum Inhalt.

Die Aufgaben können bei Mkid-Stunden als **Puffer** eingesetzt werden.

Der **Zeitbedarf** erstreckt sich mit allen Abstufungen von einer Minute (*Dörtes Mutter, Vier Töchter*) bis zu einer ganzen Sitzung (*Kryptogramm, römische Zahlzeichen, zeichnerisches Multiplizieren*), wenn man das ausdehnen möchte.

Manche Aufgabentypen (*Stimmt's; Schätzfragen*) eignen sich für ein kleines **Gewinnspiel**.

Eine Knobelaufgabe oder ein „Dreierpack“ von einer geeigneten Mischung von Knobelaufgaben zum Abschluss der Mkid-Stunde könnte zu einem **Ritual** werden.

Manche Aufgaben eignen sich gut zur **selbständigen Variation** durch die Schülerinnen und Schüler (*Buchstaben-Rätsel, Durchschnitte, Würfel*).

Es ist nicht daran gedacht, dass die Lehrperson die Aufgaben gedruckt austellt, sondern dass die **Aufgaben vorgelesen** und ggf. im Unterrichtsgespräch **erläutert** werden. Ggf. werden wichtige Informationen an die Tafel (o.ä.) geschrieben.

Für die Aufgaben *Punktsymmetrisch* und *Vier gleiche Teile* kann man auf das Arbeitsblatt *4-4-Quadrate* zurückgreifen, wenn man das möchte.

Bei Aufgaben die Figuren enthalten, kann man auf das Arbeitsblatt *Figuren* zurückgreifen, wenn man das möchte.

Bei **schwierigen Aufgaben** (*Kryptogramm, Waageprobleme*) ist es schon gut, wenn die Schülerinnen und Schüler

- das Problem erfassen
- sich Gedanken machen
- von der Lehrkraft gesagt bekommen, dass dieses Problem ganz ganz schwierig ist
- selbständig erste Lösungsansätze fassen (loben, loben, loben!)
- mit einem Tipp auf die richtige Lösung kommen
- das Dilemma auskosten
- die Auflösung verstehen
- deren intellektuellen Charme erkennen
- erkennen, dass es auch bei aussichtslosen Situationen eine Lösung geben kann

An geeigneten Stellen wird die Lehrperson auf eine der **Problemlöse-Strategien** hinweisen.

Die **Selbsterfahrung der Lehrkraft** ist wichtig beim Knobeln, hierfür sei z. B. die Aufgaben *Fischblase* oder *Kryptogramm* empfohlen.

Knobelaufgaben-Sammlung

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

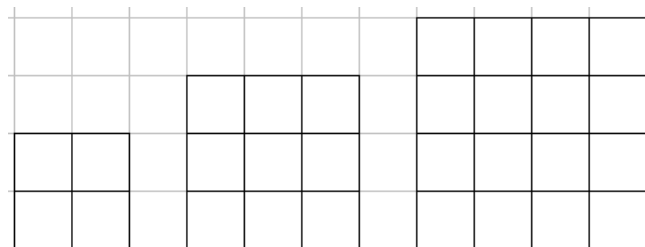
Schwierigkeitsgrad: *einfach **mittel ***schwierig

****Anzahl der Quadrate:**

In einem 2x2-Quadrat (linke Abbildung) gibt es insgesamt fünf Quadrate, nämlich vier 1x1-Quadrate und ein 2x2-Quadrat.

a) Wie viele Quadrate gibt es in einem 3x3-Quadrat (mittlere Abbildung)?

b) Wie viele Quadrate gibt es in einem 4x4-Quadrat (rechte Abbildung)?



Schreibe zunächst einzeln auf, wie viele 1x1-Quadrate, wie viele 2x2-Quadrate, wie viele 3x3-Quadrate und wie viele 4x4-Quadrate es sind.

c) Wie viele Quadrate gibt es vermutlich in einem 10x10-Quadrat?

Anzahl der Quadrate – Lösungen:

a) Anzahl der 1x1-Quadrate: 9; Anzahl der 2x2-Quadrate: 4; Anzahl der 3x3-Quadrate: 1; insgesamt also: $9 + 4 + 1 = 14$

b) Anzahl der 1x1-Quadrate: 16; Anzahl der 2x2-Quadrate: 9; Anzahl der 3x3-Quadrate: 4; Anzahl der 4x4-Quadrate: 1; insgesamt also: $16 + 9 + 4 + 1 = 30$

c) Die Vermutung $100 + 81 + 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 385$ liegt nahe.

Im Bildungsplan 2016 für die Klasse 5/6 steht: Die Schülerinnen und Schüler können die Quadratzahlen von 1^2 bis 20^2 wiedergeben und erkennen (!).

Anzahl der Quadrate – Kommentar:

Strategien: alle Fälle der Reihe nach systematisch sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“ & dann aus Beispielen eine Vermutung generieren.

Die Vermutung *In einem $N \times N$ -Quadrat gibt es $N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$ Quadrate.* liegt nahe.

Entre nous: Der Nachweis gelingt durch vollständige Induktion.

Induktionsverankerung: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $N = 1$.

Induktionsannahme: Sie sei richtig für N .

Induktionsschluss: Zeige, dass sie dann auch für $N+1$ richtig ist.

Es gilt:

Anzahl der 1x1-Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der 2x2-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Anzahl der 2x2-Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der 3x3-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

(vgl. Abbildung unten für $N = 3$) ...

Anzahl der $K \times K$ -Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der $(K+1) \times (K+1)$ -Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

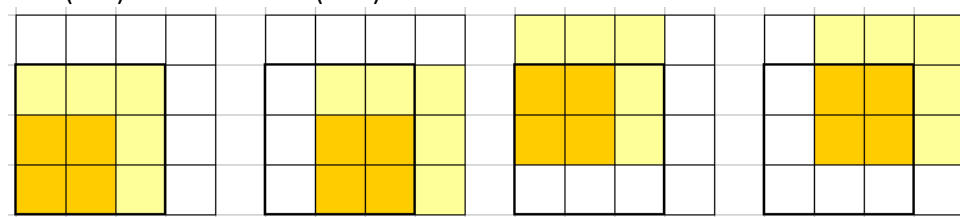
...

Anzahl der $N \times N$ -Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Insgesamt gilt: Anzahl aller Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

Anzahl aller Quadrate im $N \times N$ -Quadrat + Anzahl der 1x1-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

$$N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 + (N+1)^2 \quad \blacksquare$$



***Artisten:**

Kurt und Landolf sind beide Artisten. Von der Körpergröße her ist Kurt ziemlich kurz, Landolf ziemlich lang. Sie möchten aus einem sehr hohen Schrank etwas herausholen, einer soll sich dabei auf die Schultern des andern stellen, als Artisten können sie das. Wer muss auf wessen Schulter steigen, damit der obere möglichst hoch in den Schrank fassen kann?

Artisten - Lösung:

Die Schulterhöhe des „oberen Mannes“ ist zwar jeweils dieselbe, nicht aber die Greifhöhe, denn Landolf hat als „Langer“ auch die längeren Arme. Landolf soll auf die Schultern von Kurt steigen, nicht umgekehrt.

Artisten - Kommentar:

Eine Skizze kann helfen.

****Besteck:**

Eine Gabel und ein Löffel wiegen zusammen 135g, eine Gabel und ein Messer wiegen zusammen 140g, ein Löffel und ein Messer wiegen zusammen 155g.

Was wiegen eine Gabel, ein Löffel und ein Messer zusammen?

Besteck – Lösung:

Wirft man alles zusammen – das ist der Clou bei dieser Aufgabe, so hat man von allen drei Bestecksorten zwei Stück: zwei Gabeln, zwei Löffel und zwei Messer mit einem Gesamtgewicht von 430g. Eine Gabel, ein Löffel und ein Messer wiegen zusammen also 215g.

Besteck – Kommentar:

Hier ist nicht an die (formale) Lösung eines linearen Gleichungssystems gedacht, aus dem man zunächst die einzelnen Gewichte ermittelt (Gabel 60g, Löffel 75g, Messer 80g).

Natürlich erhält man die Einzelgewichte aus dem Summengewicht 215g dann auch schnell durch Subtraktion: Messergewicht = $215g - 135g = 80g$ usw.

***Brett:**

Ein Brett ist 250 cm lang. Es soll in gleiche Stücke zu je 50 cm Länge zersägt werden. Wie oft muss man sägen?

Brett – Lösung:

Man muss 4mal sägen, nicht 5mal – wer's nicht glaubt, macht eine Skizze.

***Buchstaben-Rätsel mit Lösungen:**

Zu einer „Abkürzung“ in einer abenteuerlichen Schreibweise ist eine Bedeutung zu finden.

Beispiel: 60 = M hat eine S → Bedeutung: 60 Minuten hat eine Stunde

500 = G hat ein P → Bedeutung: 500 Gramm hat ein Pfund

100 = L hat ein HL → Bedeutung: 100 Liter hat ein Hektoliter

4 = E hat ein D → Bedeutung: 4 Ecken hat ein Drachen

1000 = KCM hat ein L → Bedeutung: 1000 Kubikzentimeter hat ein Liter

6 = Q hat ein W → Bedeutung: 6 Quadrate hat ein Würfel

Buchstaben-Rätsel – Kommentar:

Mit den Schülerinnen und Schülern zusammen selbst Beispiele (gerne auch außermathematische: 366 Tage hat ein Schaltjahr, 4 Blätter hat ein Glücks-Kleeblatt, 5 Finger hat eine Hand, 11 Spieler hat eine Fußballmannschaft usw.) finden macht Spaß!

***Cola:**

Eine Dose Cola kostet 1 €. Das Cola selbst kostet 0,60 € mehr als die leere Dose. Was kostet die leere Dose?

Cola - Lösung:

Die spontane Idee, dass die leere Dose $1,00 \text{ €} - 0,60 \text{ €} = 0,40 \text{ €}$ kostet, ist falsch. Das offenbart eine Probe (!): $0,40 \text{ €} + (0,40 \text{ €} + 0,60 \text{ €}) = 1,40 \text{ €}$. Die Dose kostet 0,20 € (Lösung durch Probieren). Das Cola kostet dann 0,80 €, das sind tatsächlich 0,60 € mehr als 0,20 €.

***Dörtes Mutter:**

Die Mutter von Dörte hat 4 Kinder. Das erste Kind heißt Mara. Das zweite Kind hat heißt Mere. Das dritte Kind heißt Mimi. Wie heißt das vierte Kind?

Dörtes Mutter - Lösung:

Nein, nicht Momo. Das vierte Kind von Dörtes Mutter muss Dörte heißen, wenn die anderen drei Kinder offenbar nicht Dörte heißen.

****Drei-Drei-Drei:**

Von den 10 Ziffern 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 werden jeweils zwei zu einer zweistelligen Zahl zusammengefasst, anschließend wird die Summe dieser fünf Zahlen gebildet. Dafür gibt es viele Möglichkeiten. Welche davon haben die Summe 360, welche die Summe 351?

Drei-Drei-Drei – Lösungen:

$94 + 83 + 72 + 61 + 50 = 360$... das ist die maximale mögliche Summe, die fünf größten Ziffern müssen Zehnerziffern sein, die Einerziffern kann man dabei untereinander beliebig vertauschen.

$95 + 83 + 72 + 61 + 40 = 351$... ausgehend von der Maximalsumme wurde „4“ und „5“ vertauscht, das bedeutet 10 weniger und 1 mehr, die Einerziffern kann man dabei wieder untereinander beliebig vertauschen.

Vertauscht man eine andere Zehnerziffer als 5 mit irgendeiner einer Einerziffer erhält man Zahlen die kleiner sind als 351.

Drei-Drei-Drei – Kommentar:

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jede(r) kann auf seinem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen:

- eine Lösung finden - mehrere Lösungen finden - alle Lösungen finden
- begründen, warum es keine weiteren gibt

***Dreiecke:**

Ordne sechs gleich lange Stäbe so an, dass vier gleichseitige Dreiecke entstehen – genau vier, nicht mehr und nicht weniger.

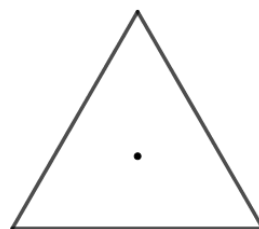
Dreiecke – Lösung:

Man bilde ein Tetraeder.

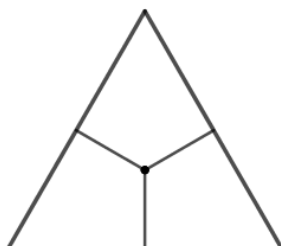
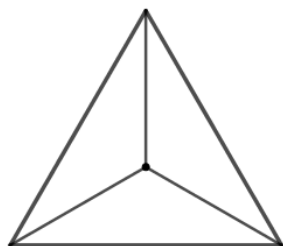
****Dreiteilung:**

Teile ein gleichseitiges Dreieck (vgl. Abbildung rechts mit eingetragenem Mittelpunkt) in deckungsgleiche Teile (gleiche Form und gleiche Größe) auf und zwar:

- a) in drei Dreiecke
- b) in drei Drachen
- c) in drei Trapeze

**Dreiteilung – Lösungen:**

- a) Verbinde den Mittelpunkt mit den Eckpunkten.
- b) Fülle das Lot vom Mittelpunkt auf die Seiten.
- c) Zeichne Parallelen zu den Seiten durch den Mittelpunkt.

**Dreiteilung – Kommentar:**

Entre nous: Vom Mittelpunkt eines Dreiecks zu sprechen verbietet sich im Allgemeinen, weil dabei unklar ist, welche „Mitte“ gemeint ist. In Frage kommen z.B. der Umkreismittelpunkt, der Inkreismittelpunkt und der Schwerpunkt. Beim gleichseitigen Dreieck fallen alle diese Punkte (und noch weitere wie der Höhenschnittpunkt oder der FERMAT-TORRICELLI-Punkt, das ist der Punkt mit der minimalen Entfernungssumme zu den Eckpunkten) zusammen, so dass man wohl von „dem“ Mittelpunkt sprechen kann.

***Durchschnitte:**

- a) Zu den Zahlen 3 und 8 ist eine dritte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der drei Zahlen 10 ist.
- b) Es sind vier unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die zweitgrößte Zahl ist.
- c) Es sind drei unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die größte der drei Zahlen ist.
- d) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 (jede der sechs Ziffern soll genau einmal verwendet werden) drei Zahlen deren Durchschnitt 37 ist.
- e) Felix hat von drei Zahlen den Durchschnitt berechnet. Er vergrößert eine Zahl um 6. Um wie viel vergrößert sich der Durchschnitt?

Durchschnitte – Lösungen:

- a) Dritte Zahl: 19, die Summe der drei Zahlen muss $3 \cdot 10 = 30$ sein.
- b) z.B.: 1; 2; 3 und 10 mit Durchschnitt 4
- c) Das ist nicht möglich.
- d) $(14 + 62 + 35) : 3 = 111 : 3 = 37$
- e) Der Durchschnitt vergrößert sich um 2.
 Formal: $(a + b + c) : 3 = m$; $(a + b + c + 6) : 3 = m + 2$.
 Man ist hier auch mit beispielgebundenen Argumentationen der Schülerinnen und Schüler zufrieden.

Durchschnitte – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können in aller Regel Durchschnitte (arithmetische Mittel) berechnen, auch schon vor einer Behandlung dieses Themas im Unterricht. Für diesen Fall würde man ausloten, was von den Aufgabenteilen a) bis d) möglich ist.

Schülerinnen und Schüler können ggf. selbst solche Aufgaben erfinden.

***Elf:**

Welche Zahl ist gemeint mit „elf Tausend elf Hundert elf“?

Elf – Lösungen:

$$11 \cdot 1000 + 11 \cdot 100 + 11 = 12.111$$

***Extreme Körper:**

Was für ein Körper ist das?

- a) ein einzelnes Spaghetti
- b) ein Blatt Papier
- c) ein Sandkorn
- d) eine Büroklammer
- e) die Spitze eines gespitzten Bleistifts
- f) ein Haar
- g) ein Trinkhalm

Extreme Körper - Lösung:

- a) ein Zylinder
- b) ein Quader
- c) eine Kugel
- d) ein gebogener Zylinder
- e) ein Kegel
- f) ein Zylinder
- g) ein Hohlzylinder (ein Zylinder bei dem innen ein kleinerer Zylinder „fehlt“)

***Farbige Socken:**

Leander hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Die liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander. Er bittet Linda ihm ein Paar gleichfarbige zu holen. Linda ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden. Wie viele Socken muss sie mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind?

Wir gehen davon aus, dass es hierbei keine linke oder rechte Socken gibt.

Farbige Socken – Lösung:

Sie muss mindestens vier Socken mitnehmen. Bei dreien sind es im ungünstigsten Fall drei verschiedene, bei vierten sind dann sicher zwei gleiche Farben dabei.

Farbige Socken – Kommentar:

Strategien hierbei:

- Den worst-case betrachten.
- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden. Wenn $n+1$ Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

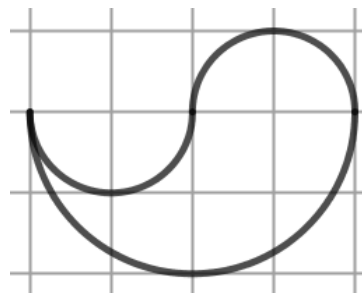
*****Fischblase:**

Teile die Fischblase (Figur rechts) in zwei deckungsgleiche Teile.
 Zur Info: Die Lösung ist nicht irgendwie „trickreich“. Man setzt (gedanklich) die Schere einmal an, schneidet ein Stück ab – fertig.

Fischblase – Lösung:

Die Lösung ist unten in sehr kleiner Schrift abgedruckt, damit man wirklich in Ruhe knobeln kann.

Der Punkt A sei der Übergang vom linken kleinen Halbkreis (der nach oben geöffnet ist) zum rechten kleinen Halbkreis (der nach unten geöffnet ist). Der Punkt B sei der Tiefpunkt der Figur, also der Mittelpunkt des großen Halbkreisbogens. Die gestrichelte Schnittlinie ist der rechte Teil des Kreises mit Durchmesser AB. Die beiden Teile kommen durch eine Drehung um A zur Deckung. Als Tipp könnte man vorgeben „Die Schnittlinie ist gebogen.“ oder noch weitergehend „Die Schnittlinie ist ein Halbkreis.“

**Fischblase – Kommentar:**

Das ist – auch für Erwachsene – ziemlich schwierig.

****Fußball-Turnier:**

Zu einem Fußball-Turnier sind sechs Mannschaften gemeldet. Jede Mannschaft spielt gegen jede.

a) Wie viele Spiele finden statt?

b) Kurz vor Turnierbeginn meldet sich noch eine siebte Mannschaft. Der Turnierleiter überlegt, ob er sie zulassen soll. Wie viele Spiele würden dazu kommen?

Fußball-Turnier – Lösungen:

a) Wir nennen die sechs Mannschaften A; B, C, D, E und F und schreiben die möglichen Begegnungen systematisch auf:

AB AC AD AE AF
 BC BD BE BF
 CD CE CF
 DE DF
 EF

Es sind 15 Spiele.

b) Mit der siebten Mannschaft G würden sechs Spiele dazu kommen: AG, BG, CG, DG, EG und FG.

Fußball-Turnier – Kommentar:

Strategie: alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“.

Entre nous – allgemein: Wie viele Spiele sind es bei n Mannschaften?

Bzw. in der kombinatorischen Übersetzung:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Objekten 2 auszuwählen?

Bei n Mannschaften gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Spiele.

***Gewicht 1:**

Mert sagt: „Ich wiege 27 kg und die Hälfte meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Mert?

Gewicht 1 – Lösung:

Der fehlende Teil ist wieder eine Hälfte, also sind 27 kg die Hälfte des Gewichts von Mert. Mert wiegt also $2 \cdot 27 \text{ kg} = 54 \text{ kg}$.

Gewicht 1 – Kommentar:

Eine kleine Skizze kann helfen.

***Gewicht 2:**

Daniel sagt: „Ich wiege 27 kg und ein Drittel meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Daniel?

Gewicht 2 – Lösung:

Der fehlende Teil zu ein Drittel sind zwei Drittel, also sind 27 kg zwei Drittel des Gewichts von Daniel. Ein Drittel wären dann 13,5 kg. Daniel wiegt also $3 \cdot 13,5 \text{ kg} = 40,5 \text{ kg}$.

Gewicht 2 – Kommentar:

Eine kleine Skizze kann helfen.

***Grabung:**

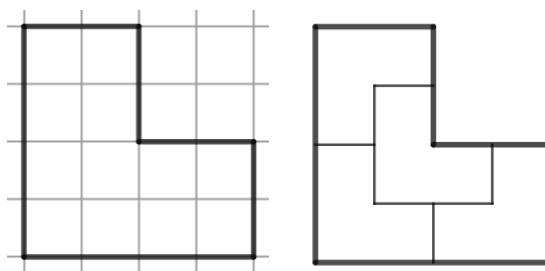
Wenn Ingmar 1 Tag braucht, um ein Loch auszugraben, das 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter tief ist, wie viele Tage braucht er dann für ein Loch, das 3 Meter lang, 3 Meter breit und 3 Meter tief ist?

Grabung – Lösung:

Nicht 3 Tage, sondern 27 Tage.

****Grundstücke 1:**

Ein hakenförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Teile (gleiche Größe und gleiche Form) aufgeteilt werden.

**Grundstücke 1 – Lösung:**

Rechte Abbildung – ohne unterlegtes Karogitter

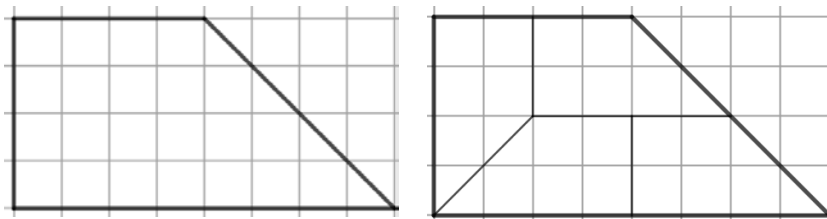
Grundstücke 1 – Kommentar:

Stellt man die Aufgabe ohne unterlegtes Karogitter (dafür mit den Angaben „nur rechte Winkel, die kürzeren Strecken sind alle gleich lang.“), fällt das Auffinden der Lösung erfahrungsgemäß deutlich schwerer.

Für beide Fälle gilt: Wenn man sich einmal von der Hoffnung verabschiedet hat, dass man mit der Rechtecksform hinkommt, liegt die Lösung „nahe“.

****Grundstücke 2:**

Ein trapezförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Trapeze aufgeteilt werden.

**Grundstücke 2 – Lösung:**

Rechte Abbildung

Grundstücke 2 – Kommentar:

Stellt man die Aufgabe ohne die Angabe der Art der vier deckungsgleichen Stücke („Trapeze“) wird es wesentlich schwieriger, dann ist es eine ***-Aufgabe. Man wird wohl zunächst mit Dreiecken experimentieren, was aber nicht zum Ziel führt.

****Haare:**

Gibt es in Stuttgart zwei Personen, die gleich viele Haare auf dem Kopf haben?

Haare – Lösung:

Stuttgart hat etwa 600.000 Einwohner. Menschen haben bis zu 150.000 Haare auf dem Kopf. Angenommen es gäbe nur 150.001 Stuttgarter, dann könne es theoretisch passieren, dass der 1. Stuttgarter 0 Haare, der 2. Stuttgarter 1 Haar, der 3. Stuttgarter 2 Haare usw. und der 150001. Stuttgarter 150.000 Haare auf dem Kopf hätte. Also hätten alle eine unterschiedliche Anzahl. Jetzt gibt es aber noch viel mehr Stuttgarter, also sicher auch zwei mit einer gleichen Kopfhaar-Anzahl – selbst wenn man ggf. noch einen Bart mit einrechnet 😊.

Haare – Kommentar:

Strategien hierbei sind: - Den worst-case betrachten.

- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden, dies lautet z.B. so: Wenn $n+1$ Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

Hundert:

Zu Verfügung stehen die Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9. Die Zahl 100 soll erreicht werden. Dabei gelten die folgenden Regeln:

- Die Reihenfolge der Ziffern darf nicht verändert werden.
- Man kann Ziffern zu einer mehrstelligen Zahl verbinden.
- Es darf addiert und subtrahiert werden.

Beispiel: $123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$

Hundert – Lösungen:

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$$

$$123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$$

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100$$

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100$$

$$12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100$$

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$

$$1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$$

$$1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100$$

Hundert – Kommentar:

Man kann ein Wettspiel (Wer findet am meisten Möglichkeiten?) oder eine Teamarbeit daraus machen (Finden wir gemeinsam alle 10 Möglichkeiten?).

****Kamele:**

Ein alter Araber bestimmt vor seinem Tode, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite Sohn den dritten und der dritte Sohn den neunten Teil seiner Kamele erhalten soll. Da er 17 Kamele hinterließ, konnten sich die Söhne nicht einigen. Ein Derwisch, der mit einem alten Kamel vorbeikam, half ihnen und sagte: „Ich will euch mein Kamel leihen.“ Nun nahm jeder der Söhne von den 18 Kamelen seinen Teil, der erste Sohn 9 Kamele, der zweite Sohn 6 Kamele und der dritte Sohn 2 Kamele.

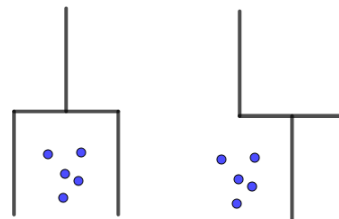
Damit waren 17 der 18 Kamele verteilt und der Derwisch zog mit seinem übrig gebliebenen Kamel weiter. Hier stimmt doch etwas nicht! Aber was?

Kamele – Lösung:

Die drei Teile, die der alte Araber seinen Söhnen bestimmt hat, geben zusammen kein Ganzes. Es ist nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$. Damit bleibt beim Verteilen natürlich etwas übrig.

***Kehrschaufel:**

Vier Hölzer stellen eine Kehrschaufel dar, in der Schaufel liegt etwas Dreck – vgl. linke Abbildung. Lege zwei Hölzer so um, dass der Dreck außerhalb der Schaufel liegt.

**Kehrschaufel – Lösung:**

rechte Abbildung

***Knöpfe:**

In einer Familie sind sieben Söhne. Jeder Sohn hat sieben Hemden. Jedes Hemd hat sieben Knöpfe. Wie viele Knöpfe sind es insgesamt?

Knöpfe – Lösung:

Es sind $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ Knöpfe.

Knöpfe – Kommentar:

Beachte die so genannte Produktregel der Kombinatorik (nicht addieren!)

***Körper: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)**

- Ein geometrischer Körper hat acht Ecken und zwölf Kanten. Welcher könnte es sein?
- Ein geometrischer Körper hat fünf Ecken und acht Kanten. Welcher könnte es sein?
- Ein Rechteck rotiert schnell um eine seiner Seiten. Welcher Körper „entsteht“?

Körper – Lösung:

- Es könnte ein Quader sein.
- Es könnte eine quadratische Pyramide sein.
- Es „entsteht“ ein Zylinder.

Körper – Kommentar:

Zu a) und b) Das kann man mit Prismen variieren.

Zu c) Das kann man mit rechtwinkligen Dreiecken variieren.

*****Kryptogramm:**

Jeder Buchstabe steht für eine Ziffer von 0 bis 9, unterschiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern. Keine Zahl beginnt mit einer 0.

a) ONE	b) EIN	c) ZWEI	d) EINS	e) EINS	f) EINS
+ ONE	+ EIN	+ ZWEI	+ EINS	+ EINS	+ EINS
-----	-----	-----	-----	+ EINS	+ EINS
= T00	= ZWEI	= VIER	= ZWEI	-----	+ EINS
				= DREI	-----
					= VIER

Kryptogramm – Lösungen und Kommentar:

Kryptogramme sind ganz ganz schwierig, man wird auch mit Lösungsansätzen zufrieden sein und ggf. viel loben und Hilfen geben. Die Aufgabe ist auf natürliche Weise binnendifferenzierend: man kann eine oder mehrere Lösungen finden.

Zu a) Diese erste Aufgabe sollte man mit den Schülerinnen und Schüler gemeinsam machen, damit klar wird wie man sich hier vorwärts arbeitet. Hier eine Reihe von Überlegungen:

- Wir kümmern uns zuerst um O, das kommt oft vor.
- Für O kommen nur die Ziffern 1; 2; 3 und 4 in Frage. Ab O = 5 gäbe es einen Übertrag und das Ergebnis wäre vierstellig. O = 0 kommt auch nicht in Frage wegen der Regel *Keine Zahl beginnt mit einer 0*.
- O muss eine gerade Zahl sein wegen $E + E = O$. Es bleibt also nur O = 2 oder O = 4.
- Wir probieren es mit O = 2. Dann muss E = 1 oder E = 6 sein.
- E = 6 geht nicht, es würde einen Übertrag geben und das passt dann nicht mit $N + N + 1 = 2$ bzw. 12.
- Also weiter mit E = 1. Dann muss N = 6 sein, denn die 1 ist ja schon „verbraucht“ (Regel: *Unterschiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern*.)
- Dann muss T = 5 sein – fertig ☺

Jetzt bearbeiten die Schülerinnen und Schüler selbständig auf die gleiche Weise den Fall O = 4 und erhalten die zweite Lösung. Hier die beiden Lösungen:

ONE	261	472
+ ONE	+ 261	+ 472
-----	-----	-----
= T00	= 522	= 944

Zu b) Einige Überlegungen:

- Z kann nur durch einen Übertrag zustande kommen, also Z = 1.
- E muss „groß“ sein, wegen dieses Übertrags. Also E = 5 oder E = 6 oder E = 7 oder E = 8 oder E = 9.
- Wir beginnen einmal mit E = 5. W muss dann 0 oder 1 sein. Da Z = 1 ist, kommt nur W = 0 in Frage.
- Also gibt es keinen Übertrag hierher. Dann muss I = 2 sein mit 1 als Übertrag. Es bleibt nur schließlich nur N = 6.

Es gibt insgesamt fünf Lösungen, mindestens eine davon könnten die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden. Recht zügig geht es, wenn man mit verschiedenen Einsetzungen für N beginnt.

EIN	526	684	789	842	947
+ EIN	+ 526	+ 684	+ 789	+ 842	+ 947
-----	-----	-----	-----	-----	-----
= ZWEI	= 1052	= 1368	= 1578	= 1684	= 1894

Zu c) Eventuell einen Tipp abgeben:

Kümmere dich zuerst um E; „E + E = E“ ist interessant. Es kann nur E = 0 oder E = 9 sein.

Hier gibt es insgesamt 12 Lösungen, mindestens eine davon könnten die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden.

ZWEI	1397	1602	1704	1795	1897	2704
+ ZWEI	+ 1397	+ 1602	+ 1704	+ 1795	+ 1897	+ 2704
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= VIER	= 2794	= 3204	= 3408	= 3590	= 3794	= 5408

ZWEI	2897	3102	3204	3295	3602	4295
+ ZWEI	+ 2897	+ 3102	+ 3204	+ 3295	+ 3602	+ 4295
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= VIER	= 5794	= 6204	= 6408	= 6590	= 7204	= 8590

Zu d) Eventuell einen Tipp abgeben: E muss klein sein (E = 1 oder E = 2 oder E = 3 oder E = 4), denn es gibt keinen Übertrag bei der Tausenderziffer, sonst wäre das Ergebnis fünfstellig. Diese Möglichkeiten einfach ausprobieren und schauen, wie man „durchkommt“.

Hier gibt es insgesamt 11 Lösungen, eine davon können die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden.

EINS	1407	1457	1608	1809	1859	2814
+ EINS	+ 1407	+ 1457	+ 1608	+ 1809	+ 1859	+ 2814
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= ZWEI	= 2814	= 2914	= 3216	= 3618	= 3718	= 5628

EINS	2864	3417	3618	3819	4271	
+ EINS	+ 2864	+ 3417	+ 3618	+ 3819	+ 4271	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	
= ZWEI	= 5728	= 6834	= 7236	= 7638	= 8542	

Zu e) Einige Überlegungen (ggf. Tipps):

- Es muss gelten $E = 1$ oder $E = 2$ oder $E = 3$, sonst gäbe es einen Übertrag und das Ergebnis wäre fünfstellig.
- Wir beginnen einmal mit $E = 1$. Wenn es von der Einer- zur Zehnerziffer keinen Übertrag gibt muss $N = 7$ sein und für S bleibt nur die 2 oder die 3.
- Nur der Fall $S = 2$ führt zu einem Ergebnis. Usw.

Es gibt insgesamt sieben Lösungen, mindestens eine davon können die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden.

EINS	1204	1672	1739	1806	2107	2341	2709
+ EINS	+ 1204	+ 1672	+ 1739	+ 1806	+ 2107	+ 2341	+ 2709
+ EINS	+ 1204	+ 1672	+ 1739	+ 1806	+ 2107	+ 2341	+ 2709
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= DREI	= 3612	= 5016	= 5217	= 5418	= 6321	= 7023	= 8127

zu f) Einige Überlegungen (ggf. Tipps):

- Es muss gelten $E = 1$ oder $E = 2$, sonst gäbe es einen Übertrag und das Ergebnis wäre fünfstellig.
- Es muss gelten $I = 0$ (kein Übertrag von den Zehnerziffern her) oder $I = 3$ (Übertrag 1 von den Zehnerziffern her) oder $I = 6$ (Übertrag 2 von den Zehnerziffern her) oder $I = 9$ (Übertrag 3 von den Zehnerziffern her).

Diese Kombinationen muss man durchprobieren. Es gibt nur eine Lösung und zwar für die Kombination $E = 1$ und $I = 3$.

Das ist jetzt doch ganz schön schwierig.

Man könnte auch einfach die Überlegung bezüglich $E = 1$ oder $E = 2$ (s.o.) sowie $S = 9$ vorgeben.

EINS	1329
+ EINS	+ 1329
+ EINS	+ 1329
+ EINS	+ 1329
-----	-----
= VIER	= 5316

**Magische Quadrate 1:

Bei einem magischen 3x3-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ...; 9 so in die neun Felder einzutragen, dass die Summe der drei Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

a) Wie muss diese magische Summe lauten?

b) linke Abbildung: Ergänze zu einem magischen 3x3-Quadrat.

Magische Quadrate 1 – Lösung:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, diese Summe ist gleichmäßig auf drei Zeilen zu verteilen.

Die magische Summe ist also $45 : 3 = 15$.

	9		4	9	2
			3	5	7
	1		8	1	6

b) Wegen der magischen Summe 15 muss die 5 in der Mitte stehen. In der unteren Zeile müssen zwei Zahlen mit der Summe 14 stehen, 7 kann nicht doppelt vorkommen, es bleiben also nur 6 und 8 übrig. Beide Möglichkeiten führen in der Tat zu einem magischen 3x3-Quadrat (Probe!), eines davon zeigt die rechte Abbildung.

Magische Quadrate 1 – Kommentar:

Das so genannte Lo-Shu-Quadrat (rechte Abbildung) ist das älteste bekannte magische Quadrat (2800 v. Chr., China).

Man kann zeigen, dass bei jedem magischen 3x3-Quadrat die 5 in der Mitte stehen muss. Dass die 1 (und damit natürlich auch die 9) nicht in einer Ecke stehen kann, ergibt sich direkt durch Ausprobieren. Alle weiteren magischen 3x3-Quadrate ergeben sich damit aus dem gezeigten durch Spiegelung oder Drehung. Wenn man möchte, kann man hieraus eine c)-Aufgabe formulieren.

In der Abbildung unten sind alle acht magischen 3x3-Quadrate abgebildet.

4	9	2	2	9	4	8	1	6	6	1	8	8	3	4	6	7	2	2	7	6	4	3	8
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	1	5	9	1	5	9	9	5	1	9	5	1
8	1	6	6	1	8	4	9	2	2	9	4	6	7	2	8	3	4	4	3	8	2	7	6

**Magische Quadrate 2:

Bei einem magischen 4-4-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ... ; 16 so in die 16 Felder einzutragen, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

a) Wie muss die magische Summe lauten?

b) Fülle die restlichen zehn Felder zu einem magischen 4x4-Quadrat aus – vgl. linke Abbildung.

16				16	3	2	13
	10	11		5	10	11	8
	6			9	6	7	12
4			1	4	15	14	1

Magische Quadrate 2 – Lösung:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 16 = 136$, diese Summe ist gleichmäßig auf vier Zeilen zu verteilen.

Die magische Summe ist also $136 : 4 = 34$.

b) Wegen der magischen Summe 34 muss im noch freien mittleren Feld 7 stehen. In der unteren Zeile müssen zwei Zahlen mit der Summe 29 stehen, es bleiben nur 14 und 15 übrig, beide möglichen Positionierungen führen zu einem magischen 4x4-Quadrat (Probe!), eines davon zeigt die rechte Abbildung oben.

Magische Quadrate 2 – Kommentar:

Das gezeigte magische 4x4-Quadrat findet sich in Melencolia 1, einem berühmten Kupferstich von Albrecht Dürer (1514).

*Magische Quadrate 3:

Bei einem magischen 5x5-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ... ; 25 so in die 25 Felder einzutragen, dass die Summe der fünf Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

- a) Wie muss die magische Summe lauten?
 b) Fülle die restlichen elf Felder zu einem magischen 5x5-Quadrat aus – vgl. linke Abbildung.

Magische Quadrate 3 – Lösung:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 325$, diese Summe ist gleichmäßig auf fünf Zeilen zu verteilen.
 Die magische Summe ist also $325 : 5 = 65$.

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

- b) Mithilfe der magischen Summe wird man sich sukzessive zur Lösung (Probe!) vorwärtsarbeiten, man muss keine Verzweigungen ausprobieren – rechte Abbildung.

****MiniMax:**

- a) Bilde aus den Ziffern 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 zwei fünfstellige Zahlen, deren Differenz möglichst klein ist.
 b) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 4 und 8 zwei zweistelligen Zahlen, deren Quotient möglichst groß ist.
 c) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistelligen Zahlen, deren Produkt möglichst groß ist.
 d) Suche unter den Quadratzahlen bis 289 diejenigen, die Summe von zwei Quadratzahlen sind.

****MiniMax – Lösungen:**

- a) $50123 - 49876 = 247$... Dass die Zehntausenderziffern Nachbarzahlen sein sollten, ist wohl bald klar. Dass es aber optimalerweise die 4 und die 5 sein sollten, erkennt man eventuell erst nach einigem Ausprobieren.
 b) $84 : 12 = 7$... Der Dividend muss möglichst groß sein, der Divisor möglichst klein.
 c) $41 \cdot 32 = 1312$... Dass die beiden großen Ziffern als Zehnerziffer verwendet werden sollten, ist wohl bald klar. Dass aber $41 \cdot 32 (=1312)$ größer ist als $42 \cdot 31 (=1302)$, ist doch eine erstaunliche Erkenntnis.
 d) $25 = 16 + 9$ $100 = 64 + 36$ $169 = 144 + 25$ $225 = 144 + 81$ $289 = 225 + 64$ $400 = 256 + 144$

****MiniMax – Kommentar:**

zu c) Entre nous – allgemein gilt: Ein Produkt bleibt i.a. nicht gleich, wenn man den einen Faktor um 1 erhöht und den anderen um 1 verringert. Genauer:

$$(a + 1) \cdot (b - 1) = a \cdot b + b - a - 1 \text{ ist kleiner als } a \cdot b, \text{ wenn } b - a - 1 < 0 \text{ bzw. } a > b - 1 \text{ ist.}$$

Noch allgemeiner für $x > 0$:

$$(a + x) \cdot (b - x) = a \cdot b + b \cdot x - a \cdot x - x^2 \text{ ist kleiner als } a \cdot b, \text{ wenn } b \cdot x - a \cdot x - x^2 < 0 \text{ bzw. } a > b - x \text{ ist.}$$

Zu d) Mit System vorgehen – z.B. so: Zunächst diese 20 Quadratzahlen aufschreiben

1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 400

und dann daraufhin prüfen, ob sie als Summe von zwei Zahlen weiter links dargestellt werden können.

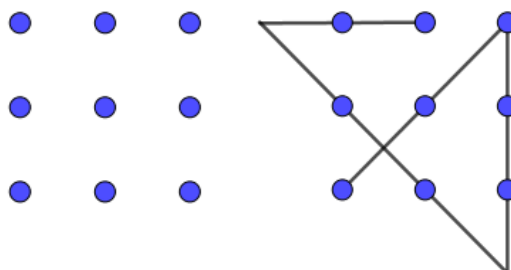
Z.B.: $121 = 100 + 21$ (☹) $121 = 81 + 40$ (☹) $121 = 64 + 57$ (☹) ... ab hier keine weiteren Möglichkeiten

Interessant ist die geometrische Anwendung (Kehrsatz des Pythagoras):

Gilt $a^2 + b^2 = c^2$ dann ist das aus den Stäben der Länge a, b und c gebildete Dreieck rechtwinklig.

****Neun Punkte:**

Neun Punkte – vgl. linke Abbildung – sollen mit einem zusammenhängenden, aus vier Teilen bestehenden Streckenzug verbunden werden. Kein Punkt darf zweimal von dem Streckenzug erfasst werden.

**Neun Punkte – Lösung:**

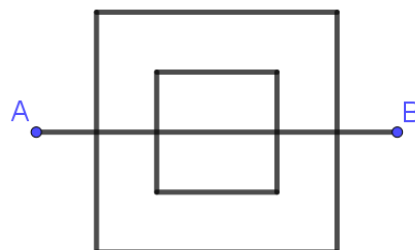
rechte Abbildung

Neun Punkte – Kommentar:

Man muss (!) über die Zeichnung (metaphorisch: über den Tellerrand!) hinausgehen.

***Postbote:**

Der Postbote möchte seinen Bezirk (vgl. Abbildung) von A nach B in einem Zug durchlaufen und keine Strecke zweimal begehen.

***Postbote – Lösung:**

Hier wird jeweils beschrieben, wie der Postbote sich z. B. der Reihe nach an Kreuzungen entscheidet, es gibt mehrere Lösungen:

links / rechts / rechts / links / rechts / links / links / rechts

***Plus-Zeichen:**

Setze zwischen die Ziffern der Zahl 987654321 Plus-Zeichen so, dass als Summe 99 entsteht.

Plus-Zeichen - Lösungen:

1. Lösung: $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$
2. Lösung: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$

Plus-Zeichen - Kommentar:

Der Anfang muss $9 + 8 + 7$ lauten, sonst kommt man zwangsläufig über die 99 hinaus.

Es gibt beliebig viele Varianten zu dieser Aufgabe, z.B.: Setze zwischen die Ziffern der Zahl 88.888.888 Plus-Zeichen so, dass als Summe 1000 entsteht (Lösung: $888 + 88 + 8 + 8 + 8$).

Vielleicht können Sie bzw. dann auch Ihre Schülerinnen und Schüler auch selbst solche Aufgaben erfinden? Das ist nicht so schwer wie es vielleicht scheint, denn Sie bestimmen die Regeln ☺ - welche Ziffern und wie viele, welche Zeichen, welches Ergebnis.

Weitere Beispiele:

- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 5.555.555.555 Plus- oder Minus-Zeichen so, dass als Ergebnis 1000 entsteht (Lösung: $555 + 555 - 55 - 55$).
- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 44.444.444 Plus- oder Mal-Zeichen so, dass als Ergebnis 100 entsteht (Lösung: $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4$).
- Mit den Zeichen $+$ $-$ $\cdot$ $:$: $222 = 6$ $333 = 6$ $555 = 6$ $666 = 6$ $777 = 6$
(Lösungen: $2 + 2 + 2 = 6$; $3 \cdot 3 - 3 = 6$; $5 + 5 : 5 = 6$; $6 + 6 - 6 = 6$; $7 - 7 : 7 = 6$)

****Primzahlen:**

Von dem Hobby-Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH (1690 – 1764) stammt die Vermutung:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

Bis heute weiß man nicht, ob diese Vermutung zutrifft. Gesichert ist sie mit Computerhilfe jedenfalls für die Zahlen bis $4 \cdot 10^{18}$.

a) Schreibe alle geraden Zahlen zwischen 30 und 50 als Primzahlen.

b) Schreibe 44 auf alle möglichen Arten als Summe zweier Primzahlen.

Primzahlen – Lösungen:

- a) z.B. $30 = 11 + 19$ $32 = 3 + 29$ $34 = 11 + 23$ $36 = 17 + 19$ $38 = 7 + 31$
 $40 = 3 + 37$ $42 = 5 + 37$ $44 = 13 + 31$ $46 = 17 + 29$ $48 = 11 + 37$ $50 = 19 + 31$
- b) $3 + 41$; $7 + 37$; $13 + 31$

Primzahlen – Kommentar:

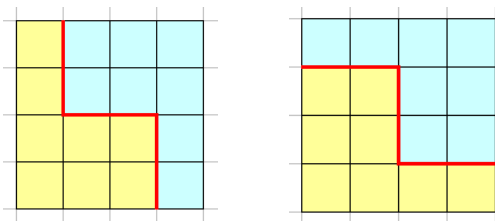
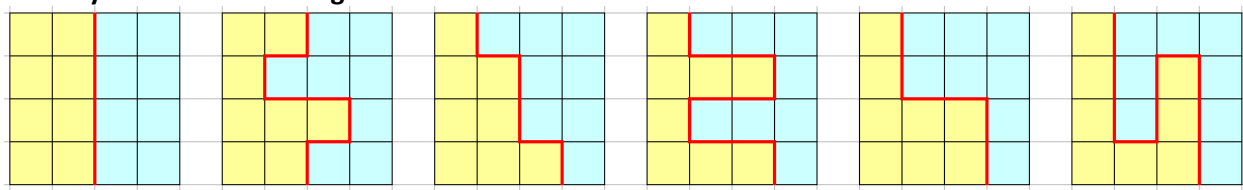
a) Die Schülerinnen und Schüler sollten aus der Klasse 5 den Primzahlbegriff und die Primzahlen bis 40 kennen. Man kann den Begriff wiederholen und die Liste zunächst aufschreiben lassen:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 39; 41; ...

b) Strategie: alle Möglichkeiten mit System durchgehen, das heißt hier: die Primzahlreihe einfach der Reihe nach durchgehen und prüfen, ob der ergänzende Summand wieder eine Primzahl ist.

****Punktsymmetrisch:**

Teile das Quadrat durch einen Streckenzug entlang der Gitterlinien in zwei Teile auf, die zum Mittelpunkt des Quadrates punktsymmetrisch sind. Färbe die beiden Teile unterschiedlich. Lösungen die deckungsgleich sind (gleiche Form und Größe haben) sollen als gleich gelten – vgl. die beiden gezeigten Beispiele.

**Punktsymmetrisch – Lösungen:****Punktsymmetrisch – Kommentar:**

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jede(r) kann auf seinem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen – zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Arbeitsblatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden
- mehrere Lösungen finden
- alles sechs Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Beim Probieren kann man erkennen, dass der teilende Streckenzug punktsymmetrisch zur Quadratmitte sein muss. Die Frage ist also: Wie kommt man also zur Quadratmitte ohne den Rand oder den bisherigen Streckenzug zu berühren?

Ein darauf aufbauendes systematisches Vorgehen hängt jetzt nur noch vom Startpunkt ab. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten: eine Seitenmitte oder eine Mitte zwischen Seitenmitte und benachbartem Eckpunkt.

***Quadratzahlen:**

Der Vier-Quadratzahlen-Satz von LAGRANGE lautet:

Jede natürliche Zahl kann als Summe von vier Quadratzahlen geschrieben werden.

Dieser Satz ist eine Steilvorlage für Übungsaufgaben zu den Quadratzahlen und zum Kopfrechnen. Schreibe 123; 456 und 666 als Summe von vier Quadratzahlen (die Auswahl an Ausgangszahlen ist grenzenlos ☺).

Quadratzahlen – Lösung:

$$8^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 = 64 + 49 + 9 + 1 = 123$$

$$20^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 = 400 + 36 + 16 + 4 = 456$$

$$20^2 + 16^2 + 3^2 + 1^2 = 400 + 256 + 9 + 1 = 666$$

Quadratzahlen – Kommentar:

Im Bildungsplan 2016 für die Klassen 5/6 steht: Die Schülerinnen und Schüler können die Quadratzahlen von 1^2 bis 20^2 wiedergeben und erkennen (!).

****Richtig oder falsch? (Begründung oder Gegenbeispiel)**

- a) Immer wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann hat es einen rechten Winkel.
- b) Immer wenn ein Viereck vier rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.
- c) Bei jedem Rechteck halbieren die Diagonalen die Eckwinkel.
- d) Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.
- e) Für zwei natürliche Zahlen a und b ist a^b immer dasselbe wie b^a .

Richtig oder falsch? – Lösungen:

- a) offensichtlich falsch – geeignete Zeichnung
- b) falsch; es könnte auch ein Rechteck mit unterschiedlichen Seitenlängen sein
- c) falsch; man denke sich ein sehr langes und wenig breites Rechteck
- d) richtig; die beiden freien Schenkel wäre dann ja parallel, sie würden sich nicht in einem Dreieckspunkt schneiden
- e) falsch; Gegenbeispiel $3^2 = 9$ ist nicht $2^3 = 8$.

Richtig oder falsch? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Durchdringung von Sachverhalten.

***Rollende Körper:**

Ein Körper liegt auf einer Ebene und wird angestoßen.

- a) Er rollt gerade aus.
- b) Er rollt im Kreis.

Um welchen Körper könnte es sich handeln?

Rollende Körper – Lösungen:

- a) Ein Zylinder, eine Kugel
- b) Ein Kegel, ein Kegelstumpf

***Römische Zahlzeichen 1:**

Die römischen Zahlzeichen sind: I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

(Eine mögliche Merkmregel: Ich Verkaufe X Leuten Comics Drei Mal)

Weitere Zahlen entstehen dadurch, dass man mehrere dieser Zeichen aneinanderfügt.

Dabei sollen (hier) die folgenden Regeln gelten:

- Die verwendeten Zeichen werden der Größe nach aufgeschrieben (beginnend mit dem größten) und die zugehörigen Werte addiert.
 - Die Zeichen C, X und I stehen höchstens dreimal nebeneinander.
 - Die Zeichen D, L und V stehen nicht mehrmals nebeneinander.
 - Kommt im Zehnersystem die Ziffer 4 oder die Ziffer 9 vor, verwendet man jeweils eines der sechs Subtraktions-Paare, sonst nicht: $\overline{IV} = 4$; $\overline{IX} = 9$; $\overline{XL} = 40$; $\overline{XC} = 90$; $\overline{CD} = 400$; $\overline{CM} = 900$.
- Man erkennt sie daran, dass hier ein Zahlzeichen links von einem größeren steht, hierbei wird das kleinere vom größeren abgezogen (es kann nur das jeweils nächstkleinere der Zeichen I, X oder C subtrahiert werden).
- Es gibt kein Zeichen für die Null – das braucht man hier auch nicht.

Beispiele:

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1 = V I I I$$

$$32 = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = X X X I I$$

$$120 = 100 + 10 + 10 = C X X$$

$$346 = 100 + 100 + 100 + 40 + 5 + 1 = C C C \boxed{XL} V I$$

$$1789 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 9 = M D C C L X X X \boxed{IX}$$

a) Schreibe mit römischen Zahlzeichen: 17 85 104 455 880 1001 1947 4949

b) Übersetze zurück ins Zehnersystem: XIII XXVI CCC CDIII DCIII MCMXCI

c) Welche Zahl ist möglicherweise gemeint? Verbessere. IC DVD LIDL

Römische Zahlzeichen 1 – Lösungen:

a) $17 = 10 + 5 + 1 + 1 = X V I I$

$$85 = 50 + 10 + 10 + 10 + 5 = L X X X V$$

$$104 = 100 + 4 = C \boxed{IV}$$

$$455 = 400 + 50 + 5 = \boxed{CD} L V$$

$$880 = 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 = D C C C L X X X$$

$$1001 = 1000 + 1 = M I$$

$$1947 = 1000 + 900 + 40 + 5 + 1 + 1 = M \boxed{CM} \boxed{XL} V I I$$

$$4949 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 900 + 40 + 9 = M M M M \boxed{CM} \boxed{XL} \boxed{IX}$$

b) $X I I I = 10 + 1 + 1 + 1 = 13$

$$X X V I = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$$

$$C C C = 100 + 100 + 100 = 300$$

$$\boxed{CD} I I I = 400 + 1 + 1 + 1 = 403$$

$$D C I I I = 500 + 100 + 1 + 1 + 1 = 603$$

$$M \boxed{CM} \boxed{XC} I = 1000 + 900 + 90 + 1 = 1991$$

c) $I C = 100 - 1 = 99$; $I C$ ist kein mögliches Subtraktions-Paar;

Verbesserung: $99 = 90 + 9 = \boxed{XC} \boxed{IX}$

$D V D = 500 + 500 - 5 = 995$; VD ist kein mögliches Subtraktions-Paar;

Verbesserung: $995 = 900 + 90 + 5 = \boxed{CM} \boxed{XC} V$

$L I D L = 50 + (500 - 1) + 50 = 599$; ID ist kein mögliches Subtraktions-Paar, die Zeichen sind nicht der Größe nach aufgeschrieben; Verbesserung: $599 = 500 + 90 + 9 = D \boxed{XC} \boxed{IX}$

Römische Zahlzeichen 1 – Kommentar:

Die Schülerinnen und Schüler kennen die römischen Zahlzeichen wahrscheinlich schon aus der Klasse 5. Je nachdem wird man zügiger oder weniger zügig vorgehen, evtl. sogar mit c) beginnen.

Die Formulierung des Regelwerkes mithilfe der Subtraktions-Paare (das kommt so in den Schulbüchern nicht vor) zielt auf die Eindeutigkeit der Darstellung.

Schülerinnen und Schüler können sich gegenseitig Aufgaben stellen.

Römische Zahlzeichen 2:

Rechnungen mit römischen Zahlzeichen kann man z.B. mit Streichhölzern „legen“ – jeder Strich in +, = oder V mit einem Holz.

Welches Holz muss man umlegen, damit die Rechnung stimmt?

a)

$$XI - II = XII$$

b)

$$X + IV = V$$

c)

$$X + V - II = VII$$

d)

$$VI + VIII = XII$$

e)

$$XII - II = XV + VI$$

f)

$$X - II = XV + VI$$

Römische Zahlzeichen 2 – Lösungen:

a)

$$X + II = XII$$

b)

$$X - IV = VI$$

c)

$$X - V + II = VII$$

d) (mehrere Möglichkeiten)

$$IV + VIII = XII$$

e) (mehrere Möglichkeiten)

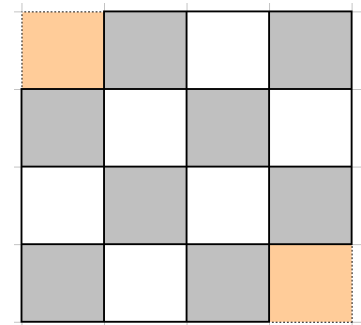
$$XII - III = XV - VI$$

f)

$$VI + IV = X$$

*****Schachbrett:**

Aus einem kleinen 4x4-Schachbrett mit 16 Feldern sind das linke obere und das rechte untere Eck-Feld herausgesägt (vgl. Abbildung). Wie kann man dieses mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer zwei Felder ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

**Schachbrett – Lösung:**

Das geht nicht. Ein Dominostein deckt immer gleichzeitig ein weißes und ein graues Feld ab.

Es gibt bei unserem ausgesägten Schachbrett aber acht graue und nur sechs weiße Felder.

Schachbrett – Kommentar:

Strategie: Grundsätzliche Sachverhalte beim Ausprobieren erkennen.

***Schätzfragen:**

Wie viel wiegt das?

- a) Ein DIN A4 Blatt normales Papier (= 80 g/m²)
- b) Das Schulbuch Lambacher Schweizer 6 (Klett 2016)
- c) Ein Päckchen Papiertaschentücher (10 Stück, normale Größe)
- d) Eine 2 € Münze

Schätzfragen – Lösungen:

- a) 5 g
- b) 616 g
- c) 26 g
- d) 8,5 g

Schätzfragen – Kommentar:

Eignet sich als Wettspiel zum Stundenabschluss: wer am besten geschätzt hat, bekommt einen (kleinen)

Preis. Weitere Anregungen: Welchen Flächeninhalt hat die Tafel? Wie hoch ist das Klassenzimmer? usw. (Ein Zollstock gehört sowieso zur Grundausrüstung jedes Mathematiklehrers ☺.)

****Spaghetti:**

Mariam kocht Spaghetti, Kochzeit fünf Minuten. Mariam stehen zwei Sanduhren zur Verfügung. Die erste braucht genau vier Minuten um ganz durchzulaufen, die zweite genau drei Minuten. Wie kann Mariam mit Hilfe dieser beiden Sanduhren die Kochzeit abmessen?

Spaghetti – Lösungen:

Mariam setzt die Spaghetti auf und lässt beide Sanduhren gleichzeitig laufen. Wenn die 3-Minuten-Sanduhr durchgelaufen ist, dreht sie sie um. Nach vier Minuten, wenn die 4-Minuten-Sanduhr fertig ist, dreht sie die 3-Minuten-Sanduhr noch mal um und hat so noch die letzte Minute. Insgesamt hat sie die Spaghetti dann 5 Minuten gekocht.

***Spiegelung:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

- Spiegle ein Dreieck an seiner längsten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?
- Spiegle ein rechtwinkliges Dreieck an seiner kürzesten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

Spiegelung – Lösungen:

- Ein Drachenviereck
- Ein gleichschenkliges Dreieck

***Stimmt's?**

- Eine Million hat neun Nullen.
- 1 Meter sind 100 Millimeter.
- 1 Ar sind 100 Quadratmeter.
- 1 Liter sind 100 Kubikzentimeter.
- Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a \cdot b$.
- Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a + b$.
- Null Komma neun plus null Komma zehn ist null Komma neunzehn.
- Eine Tonne sind 1000 Gramm.
- 1 plus 2 mal 3 plus 4 ist 5.

Stimmt's? – Lösungen:

- falsch, 6 Nullen
- falsch, 1000 Millimeter
- richtig
- falsch, es sind 1000 Kubikzentimeter
- richtig
- falsch, der Umfang berechnet sich zu $2 \cdot (a + b)$
- eher falsch, wenn man null Komma zehn versteht als 0,10, das ist eben eine ungute Sprechweise
- falsch, es sind 1000 Kilogramm
- falsch, es ergibt sich 11 (Punkt vor Strich beachten!)

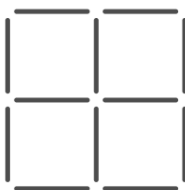
Stimmt's? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Reaktivierung von Wissen.

***Streichhölzer 1:**

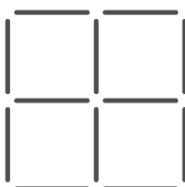
Nimm vier Streichhölzer weg, so dass zwei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

***Streichhölzer 2:**

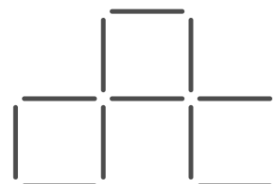
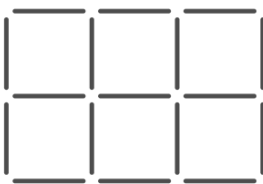
Lege drei Streichhölzer um, so dass nur noch drei Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

***Streichhölzer 3:**

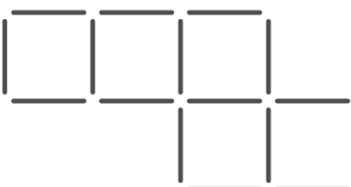
Nimm fünf Streichhölzer weg, so dass drei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

****Streichhölzer 4:**

Lege zwei Streichhölzer um, so dass nur noch vier Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 1-4 Kommentar:**

Vergleicht man die Anzahl der vorhandenen Hölzer mit der Anzahl der zu bildenden Quadrate, so erkennt man in allen vier Fällen, dass für jedes Quadrat vier Hölzer „verbraucht“ werden müssen. Das bedeutet, dass die Quadrate keine gemeinsamen Seiten haben dürfen.

****Summe:**

Jonathan berechnet der Reihe nach die folgenden Summen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} =$$

a) Rechne die Summen aus.

b) Wann hat Jonathan die Zahl 1 erreicht?

Summe – Lösung:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

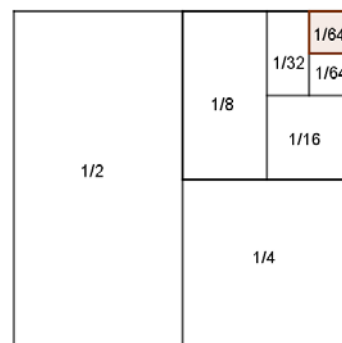
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

b) Er erreicht die Zahl 1 nie. Es fehlt zur 1 jeweils immer noch einmal der letzte Summand der jeweiligen Summe.

Man kann diese Situation wie in der Abbildung gezeigt veranschaulichen.

**Summe – Kommentar:**

Voraussetzung ist hierbei, dass die Schülerinnen und Schüler Brüche addieren können.

Das ist schon bemerkenswert –

es kommt immer noch etwas dazu und doch wird die Zahl 1 nicht erreicht oder gar überschritten.

***Teilbar 1:**

a) Schreibe alle vierstelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 auf, die durch 4 teilbar sind.

b) Schreibe alle vierstelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 auf, die durch 9 teilbar sind.

c) Wie viele vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2; 3 und 4 gibt es?

Teilbar 1 – Lösungen:

a) 3412; 4312; 4132; 1432; 1324; 3124

b) Es gibt keine solchen Zahlen wegen der Quersummenregel für die 9. Es ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, die Zahl 10 ist nicht durch 9 teilbar.

c) Es sind 24 Stück.

Lösungsweg: Alle aufschreiben – aber mit System, damit man sicher sein kann, dass man alle hat.

Zum Beispiel der Größe nach:

Zuerst alle die mit 1 beginnen: 1234 1243 1324 1342 1423 1432

Dann die mit 2 beginnen: 2134 2143 2314 2341 2413 2431 usw.

Teilbar 1 – Kommentar:

Zu c) An die Entwicklung der allgemeinen Erkenntnis

n Elemente kann man auf n! Arten anordnen ist

hier nicht unbedingt gedacht.

***Teilbar 2:**

Setze für ♣ und ♥ Ziffern ein, sodass die Zahl 123♣5678♥

a) durch 5 und 9 teilbar ist

b) durch 4 und 9 teilbar ist

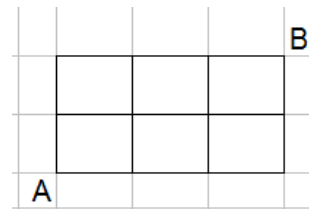
c) durch 2; 3; 4; 5 und 6 teilbar ist

Teilbar – Lösungen:

- a) 123856785
 b) 123956784
 c) 123456780

****Viele Wege:**

Wie viele Wege führen von A (links unten) nach B (rechts oben), wenn man nur auf den Gitterlinien gehen darf und keine Umwege machen möchte?

****Viele Wege – Lösung:**

Ein Weg lässt sich beschreiben durch eine Folge aus fünf Buchstaben, entweder „r“ (für „rechts“) oder „h“ (für „hoch“), wobei genau dreimal „r“ und genau zweimal „h“ vorkommen soll.

rrrrh; rrrhr; rrrhh;
 rhrrh; rhrrr; rhrrh;
 hrrrh; hrrhr; hrrrr;
 hhrrr

Es sind 10 Wege.

Viele Wege – Kommentar:

Strategie: alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“.

Der kreative Akt auf Schülerseite besteht hier aus dem Erfinden einer Systematik, z.B. in der Art der oben gezeigten.

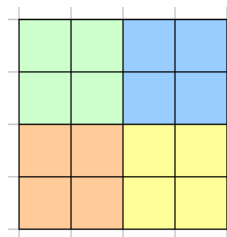
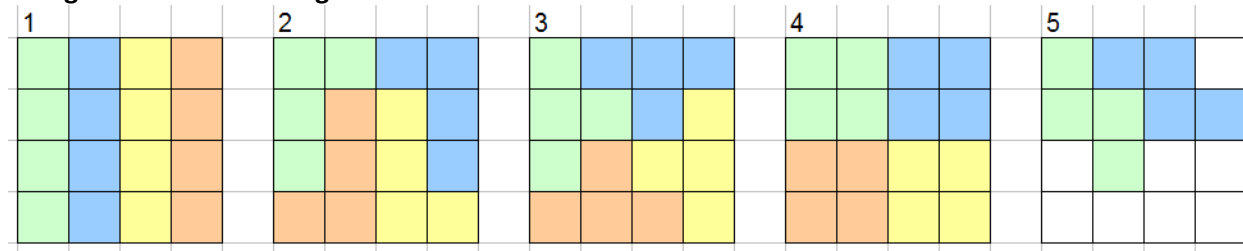
Entre nous – allgemein gilt:

Ist R die Anzahl der möglichen „Rechts-Schritte“ und H die Anzahl der möglichen „Hoch-Schritte“, so ist die Anzahl der möglichen Wege gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{R+H}{R}$.

Begründung: In einem (R+H)-Tupel sind von den R+H Stellen R Stellen auszuwählen, die mit „r“ belegt werden, die übrigen werden dann mit „h“ belegt.

***Vier gleiche Teile:**

Teile das 4x4-Quadrat entlang der Gitterlinien in vier deckungsgleiche Teile (gleich Form und Größe).
 Färbe die vier gleichen Teile unterschiedlich.
 Ein Beispiel zeigt die Abbildung.

**Vier gleiche Teile – Lösungen:**

Vier gleiche Teile – Kommentar:

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jeder kann auf seinem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen – zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Arbeitsblatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden - mehrere Lösungen finden - alle vier Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Jedes der vier Teile besteht aus vier kleinen Quadraten. Die Anzahl dieser „Vierlinge“ ist sehr begrenzt. Legt man drei Quadrate in eine Reihe und fügt ein viertes hinzu, so hat man drei Möglichkeiten: „I“, „L“ oder „T“ (vgl. in den Abbildungen oben 1; 2 und 3 – die Bezeichnungen mit Buchstaben sind der jeweiligen Form des Vierlings nachempfunden).

Will man eine 3er-Reihe vermeiden, so gibt es nur die Möglichkeiten „O“ (4) oder „N“ (5) – dieser Ansatz führt nicht zu einer Lösung.

***Viereck 1:**

Alle vier Seiten eines Vierecks sind gleich lang, es ist aber kein Quadrat. Kann das sein?

Viereck 1 - Lösung:

Ja, es ist eine Raute.

***Viereck 2:**

Die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks sind parallel, es ist aber kein Rechteck. Kann das sein?

Viereck 2 - Lösung:

Ja, es ist ein Parallelogramm.

***Vier Töchter:**

Eine Mutter hat 4 Töchter. Jede Tochter hat einen Bruder. Wie viele Kinder hat die Mutter insgesamt?

Vier Töchter - Lösung:

Die Mutter hat fünf Kinder, nämlich vier Töchter und einen Sohn (!).

****Waageproblem 1:**

Auf einem Tisch liegen 10 Stapel zu jeweils 10 Schokoladentafeln. Alle Tafeln wiegen 100g mit Ausnahme der Tafeln eines einzigen Stapels, die jeweils 110g wiegen.

Wie kann man durch eine einzige Wägung mit einer Anzeigen-Waage den Stapel mit den besonderen Tafeln sicher herausfinden?

Waageproblem 1 – Lösung:

Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln usw. und legt alle 55 Tafeln zusammen auf die Waage. Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 5500 g.

Wenn die Anzeige 5510 g lautet, dann sind die 110 g- Tafeln im 1. Stapel, denn auf der Waage liegt eine davon.

Wenn die Anzeige 5520 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 2. Stapel, denn auf der Waage liegen zwei davon usw.

****Waageproblem 2:**

Von neun äußerlich gleichen Kugeln K1, K2 ... K9 ist genau eine schwerer als die acht andern. Diese soll sicher durch zwei Wägungen mit einer Balkenwaage gefunden werden.

Waageproblem 2 – Lösung:

Lege K1, K2 und K3 auf die linke Seite der Balkenwaage, lege K4, K5 und K6 auf die rechte Seite. Jetzt gibt es drei Möglichkeiten:

- Links schwerer: die gesuchte Kugel ist K1, K2 oder K3 → zweite Wägung: links K1, rechts K2 → bei Gleichgewicht ist K3 die gesuchte Kugel
- Rechts schwerer: die gesuchte Kugel ist K4, K5 oder K6 → zweite Wägung: links K4, rechts K5 → bei Gleichgewicht ist K6 die gesuchte Kugel
- Gleichgewicht: die gesuchte Kugel ist K7, K8 oder K9 → zweite Wägung: links K7, rechts K8 → bei Gleichgewicht ist K9 die gesuchte Kugel

Waageproblem 2 – Kommentar:

Man muss sich von der Idee verabschieden, die gesuchte Kugel eventuell schon nach dem ersten Wägen benennen zu können. Hier geht es strategisch gesehen um ein schrittweises Eingrenzen der Lösung. Ideal wäre, wenn man das mit einer Balkenwaage real durchspielen könnte.

****Wie viele Dreiecke?:**

Ein Rätselklassiker lautet so:

Wie viele Dreiecke stecken in dieser Figur?

Im Internet wird die Schwierigkeit dieser Aufgabe beschworen:

„Nur Personen mit einem IQ über 120 finden mehr als 20 Dreiecke.“ Usw.

Wie viele Dreiecke? – Lösungen:

Wir notieren jeweils die drei Eckpunkte und sortieren – wegen des leichteren Abgleichens – immer alphabetisch.

ABC ABD ABE ACD ACE ADE (Dreieck ABE)

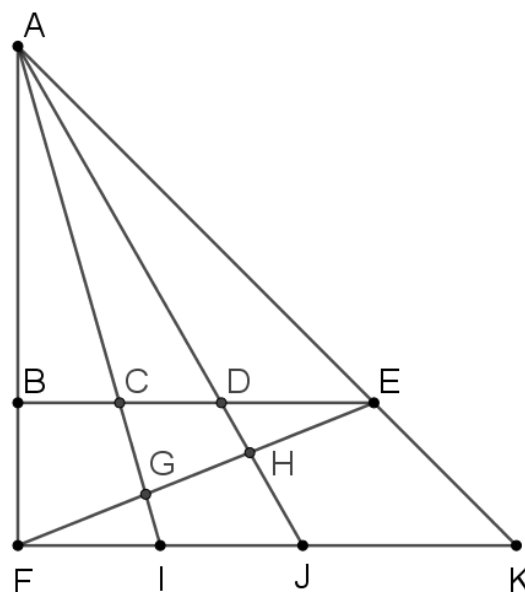
AFG AFH AFE AGH AGE AHE (Dreieck AFE)

AFI AFJ AFK AIJ AIK AJK (Dreieck AFK)

BEF CEG DEH (Dreieck EFB)

EFK FGI FHJ (Dreieck FKE)

Es sind 24 Dreiecke.

**Wie viele Dreiecke? – Kommentar:**

Man kann ein Wettspiel daraus machen (Wer findet am meisten Dreiecke?) oder eine Teamarbeit daraus machen (Finden wir gemeinsam alle Dreiecke?). Für die Kommunikation über gefundene Dreiecke ist die vereinbarte Bezeichnung der Punkte (vgl. Abbildung) und die Notation (je drei Punkte – alphabetisch sortiert) unabdingbar.

***Würfel: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)**

27 gleiche Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt. Der große Würfel wird außen rot angemalt.

- a) Wie viele der 27 kleinen Würfel sind zur Hälfte rot angemalt?
- b) Wie viele der Würfel haben zwei rote Quadrate?
- c) Gibt einen gänzlich unbemalten Würfel?

Würfel – Lösungen:

- a) 8 Würfel
 b) 12 Würfel
 c) Ja, einen, den in der Mitte.

Würfel – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können weitere solche Aufgaben erfinden, ggf. auch an einem 4x4x4-Würfel.

***Würfelnetze:**

Bei Spielwürfeln müssen gegenüberliegenden Augenzahlen zusammen immer 7 ergeben. Prüfe, ob die Würfelnetze korrekt beschriftet sind.

4	2	3		3	2			1	2			5	6			2				3		
	1				1	4			3				2			4	6	3		1	5	
	5				5				5	6			1				5				4	6
a)	6			b)	6			c)	4			d)	4	3		e)	1			f)	2	
1																						
2				5				2				3								1		
6	4			4	6	3		6	3			4	5						2	3		
	5				2				5	1			1								5	4
g)	3			h)	1			i)	4			j)	2	6					k)			6

***Würfelnetze – Lösungen:**

a); b); c); e); f); g); h) und i) sind korrekt beschriftet, d); j) und k) nicht.

**** Würfelturm:**

Susanne kennt einen Zaubertrick mit Spielwürfeln. Bei Spielwürfeln liegt die „1“ gegenüber der „6“, die „2“ gegenüber der „5“ und die „3“ gegenüber der „4“.

Sie sagt zu Peter: „Lege drei Spielwürfel aufeinander, und zwar so, dass die aufeinander liegenden Würfelflächen die gleiche Augenzahlen haben. Dann addierst du alle andern 14 Augenzahlen.“

Susanne schließt die Augen, Peter legt die drei Spielwürfel aufeinander und addiert. Als er fertig ist sagt Susanne: „Simsalabim, die Summe heißt ...“ Wie heißt die Summe? Wie „funktioniert“ der Trick?

Würfelturm – Lösungen:

Die Summe heißt 49, denn $3 \cdot (1+2+3+4+5+6) - 14 = 3 \cdot 21 - 14 = 49$. Jeder der drei Würfel hat die Augensumme $1+2+3+4+5+6 = 21$. Der Trick ist, dass die vier nicht mitgezählten Flächen immer die Summe 14 haben, denn $(4+4)+(3+3) = (5+5)+(2+2) = (6+6)+(1+1) = 14$.

Würfelturm – Kommentar:

Man kann zum Einstieg den Zaubertrick mit den Schülerinnen und Schülern durchspielen.

Man kommt dem Trick beim Ausprobieren auf die Spur.

Strategie: Beginne einfach mit einem Beispiel.

Allgemein: Für eine ungerade Anzahl von Würfeln n ist die Augensumme $n \cdot 21 - (n-1) \cdot 7 = 14 \cdot n + 7$.

Für eine gerade Anzahl von Würfeln n muss man – je nach Augenzahl der aufeinander liegenden Flächen – eine Fallunterscheidung treffen.

****Zeichnerisches Multiplizieren:**

Wie löst man die Multiplikationsaufgabe $32 \cdot 14$ durch eine Zeichnung, ohne das „kleine Einmal-Eins“?

Wir betrachten die Abbildung rechts.

Man zeichnet die Zahl 32 so:

3 „dicke“ Parallelen und 2 „dünne“ Parallelen in einigem Abstand davon von links oben nach rechts unten.

Man zeichnet die Zahl 14 so:

1 „dicke“ Gerade und 4 „dünne“ Parallelen in einigem Abstand davon von rechts oben nach links unten.

Jetzt zählt man die Schnittpunkte:

8 Schnittpunkte bei „dünn-dünn“ $\rightarrow$ **8 Einer**

$12 + 2 = 14 = 10 + 4$ Schnittpunkte bei „dünn-dick“ bzw. „dick-dünn“ $\rightarrow$ **4 Zehner** und 1 Übertrag

3 Schnittpunkte bei „dick-dick“ + 1 Übertrag $\rightarrow$ **4 Hunderter**

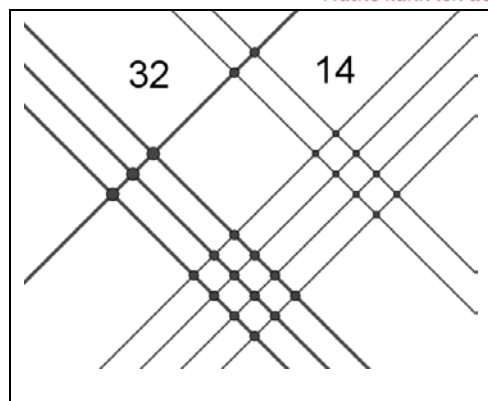
Ergebnis: $32 \cdot 14 = 448$

a) Führe dieses Verfahren durch für $45 \cdot 23$.

b) Gelingt dies auch für $123 \cdot 45$?

c) Oder sogar für $234 \cdot 345$?

d) Vergleiche mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation.

**Zeichnerisches Multiplizieren – Lösung:**

a) 1035 b) 5535 c) 80730

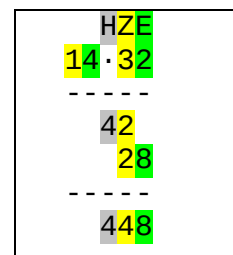
d) Es ist genau dasselbe wie bei der schriftlichen Staffeldrechnung

3 Zehner mal 4 Einer ergibt 12 Zehner, das sind 2 Zehner und 1 Hunderter,

3 Zehner mal 1 Zehner ergibt 3 Hunderter, zusammen sind es also **4 Hunderter**,

2 Einer mal 4 Einer ergibt **8 Einer** und 2 Einer mal 1 Zehner ergibt 2 Zehner, zusammen also **4 Zehner**.

Anstelle des Abzählens, wie viele Punkte die „Rechtecke“ enthalten, kann man natürlich das „Kleine Einmal-Eins“ verwenden.

**Zeichnerisches Multiplizieren – Kommentar:**

Man kann (mit weiteren Beispielen, bitte nicht mehr als dreistellige Faktoren) eine Doppelstunde mit diesem Thema füllen, wenn man möchte ☺. Anstelle von dünnen und dicken Strichen wird man – insbesondere bei dreistelligen Faktoren – mit Farben arbeiten. Hier muss man schauen, dass man den Überblick über die Bedeutung der einzelnen „Rechtecke“ (Einer? Zehner? Hunderter? usw.) nicht verliert.

Wenn der Überblick gesichert ist, dann ist es unerheblich, ob man auf kariertem Papier und mit dem Geodreieck arbeitet oder auch auf Konzeptpapier freihand.

****Zwei Liter:**

Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hat das Volumen von genau 1 Liter (= 1000 cm^3).

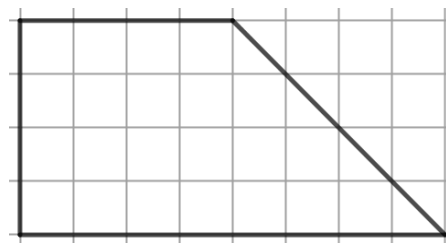
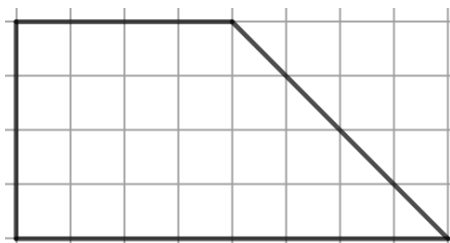
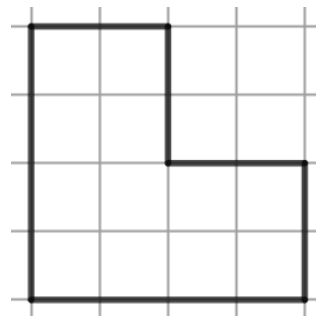
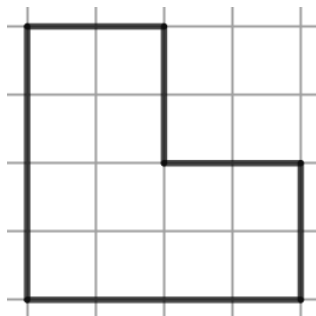
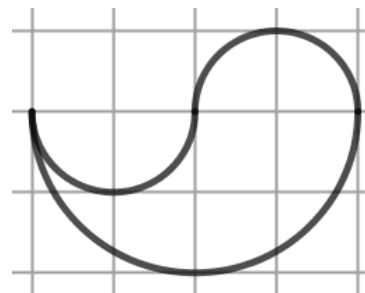
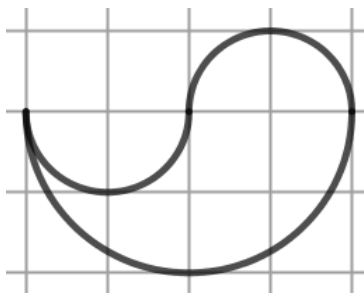
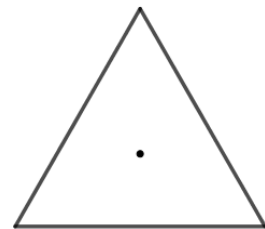
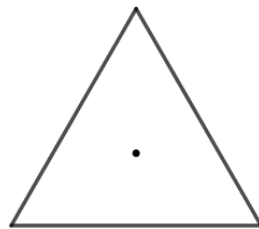
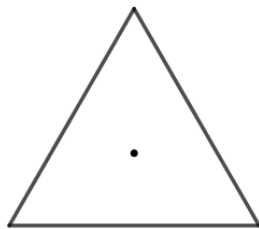
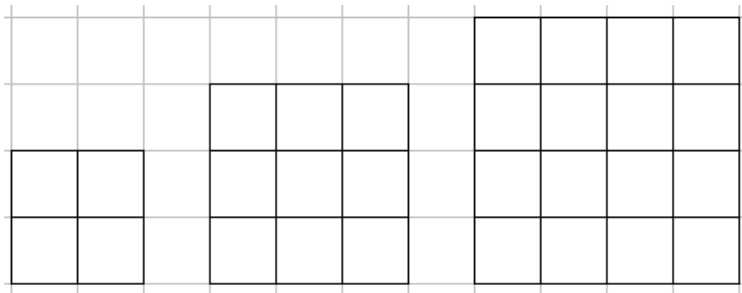
Welches Volumen bekommt man bei der doppelten Kantenlänge (= 20cm)?

Zwei Liter – Lösung:

Damit bekommt man nicht das doppelte Volumen von 2 Liter, sondern 8 Liter (= 8000 cm^3).

Zwei Liter – Kommentar:

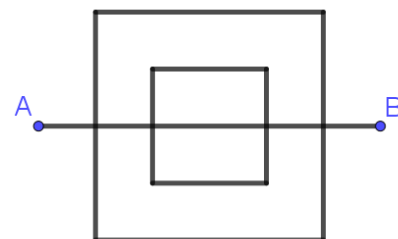
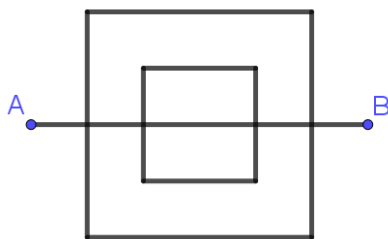
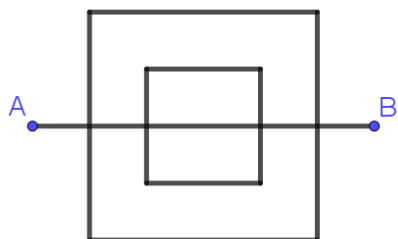
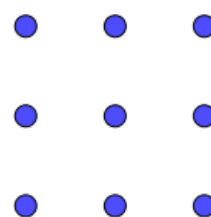
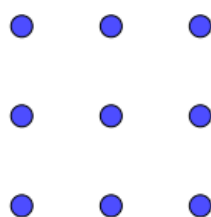
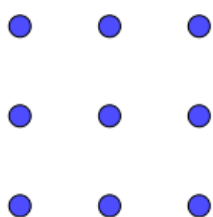
Oder in der Veranschaulichung („Kopfgeometrie“): Wie viele 10 cm-Würfel passen in einen 20 cm-Würfel? Einer links vorne unten, einer rechts vorne unten, ...



	9	
	1	

16			
	10	11	
	6		
4			1

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		



a)

$$XI - II = XII$$

d)

$$VI + VIII = XII$$

b)

$$X + IV = V$$

e)

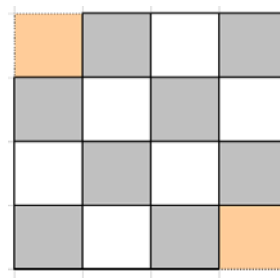
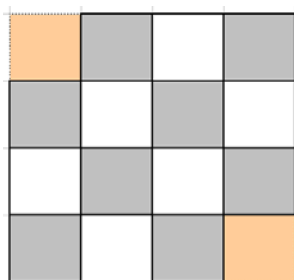
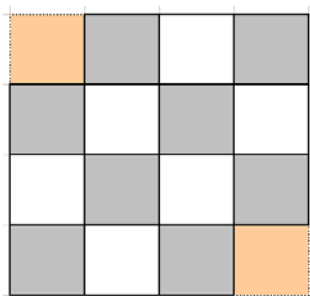
$$XII - II = XV + VI$$

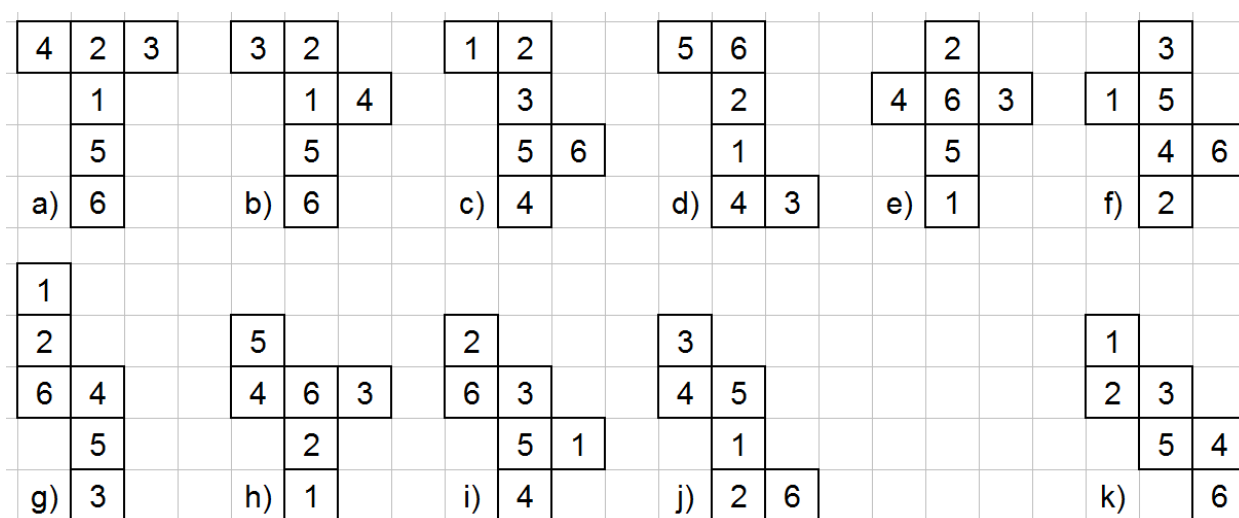
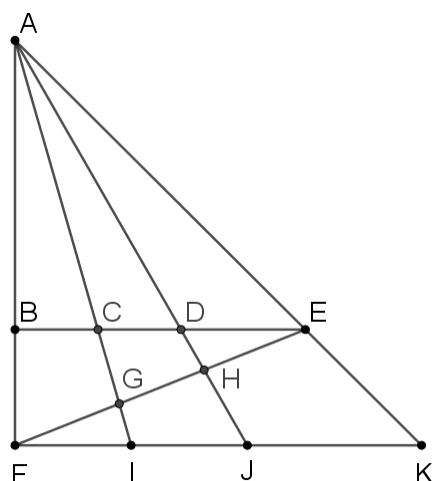
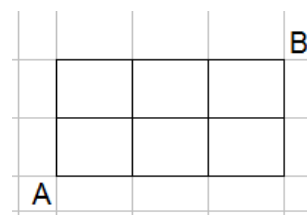
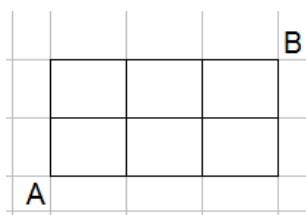
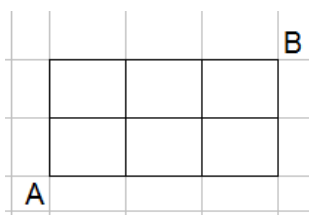
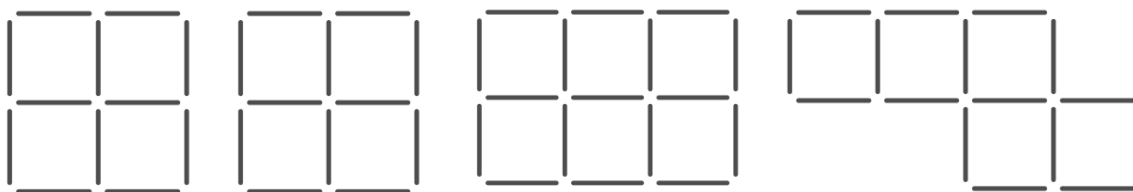
c)

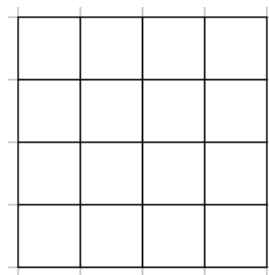
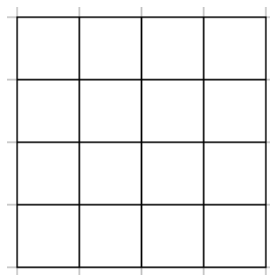
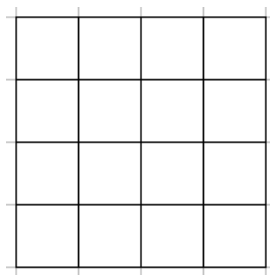
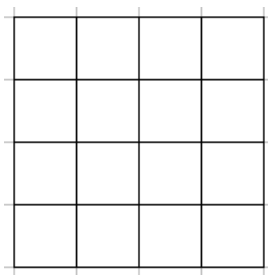
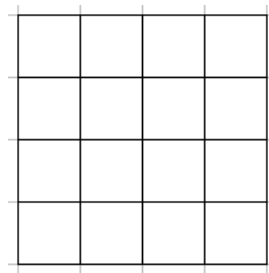
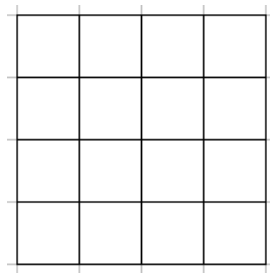
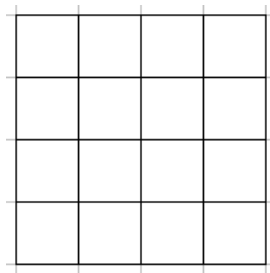
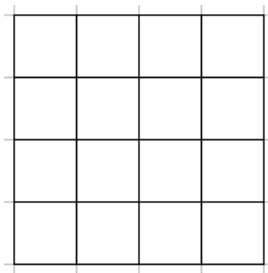
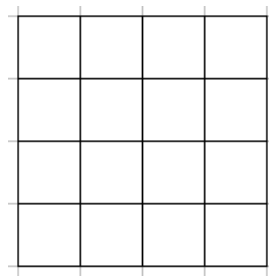
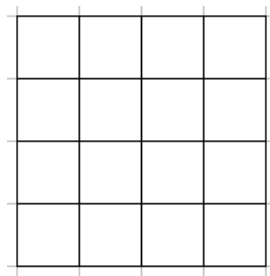
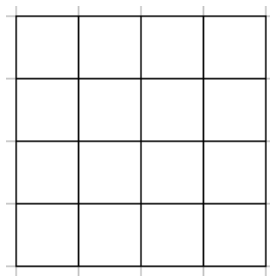
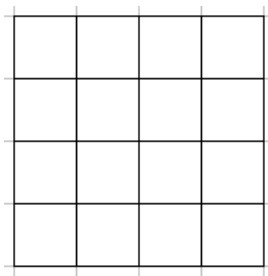
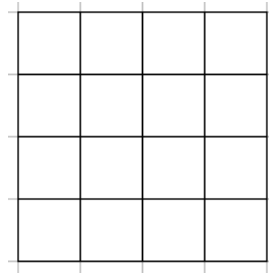
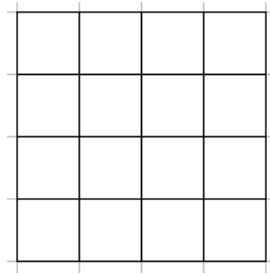
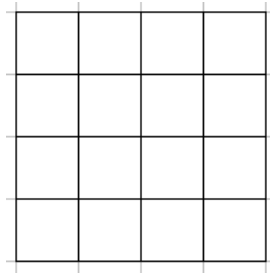
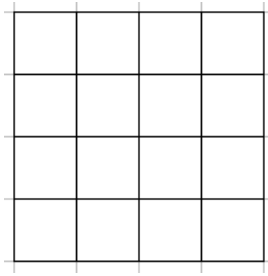
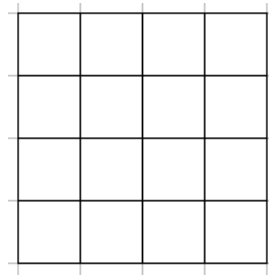
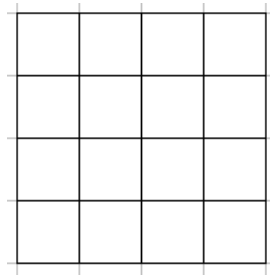
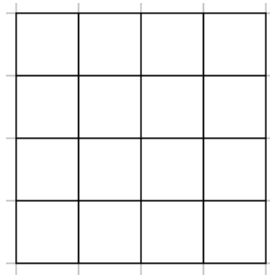
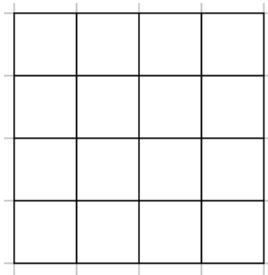
$$X + V - II = VII$$

f)

$$X - II = XV + VI$$







Kürzeste Entfernungen in Manhattan

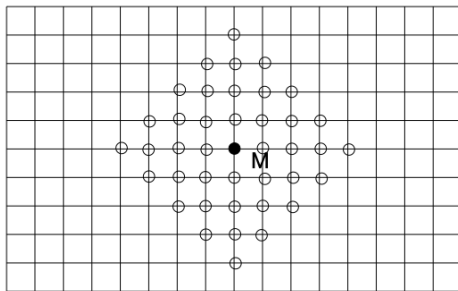
Hintergrund-Information: Die Taxi-Geometrie ist eine Geometrie, die statt der Abstandsnorm

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ die Norm } d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \text{ verwendet.}$$

Damit sind alle Aufgaben mathematisch eindeutig formulierbar. Für die SuS wäre das aber eine Überforderung. Deshalb sollten Sie die Aufgaben gemeinsam mit den SuS lesen und interpretieren. Erst dann können sie von den SuS selbstständig bearbeitet werden.

Lösungen und Erweiterungen

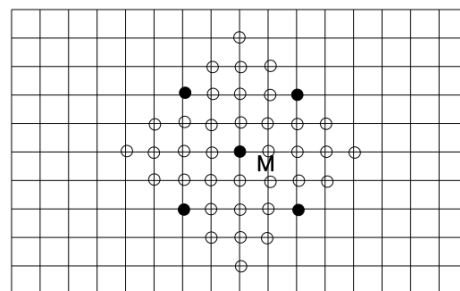
1. Aufgabe



2. Aufgabe

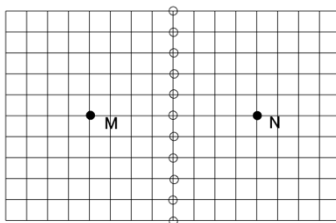
a) Es sind 4.

b) Es sind 6.

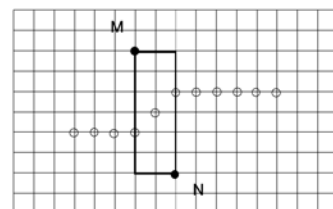
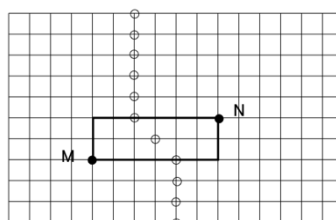
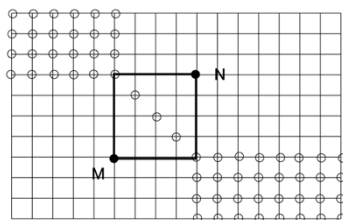


3. Aufgabe

a) Mittelsenkrechte



b) (Schwierig, nur für Könner)



Zeichnet man ein Rechteck entlang der Gitterlinien mit den Ecken M und N, dann liegen die Punkte auf der (45°-) Gitterdiagonalen durch den Mittelpunkt des Rechtecks und auf der Vertikalen (bzw. Horizontalen) der Endpunkte dieser Diagonalen.

Kürzeste Entfernungen in Manhattan

Man wird mit dem Stadtplan von Manhattan z.B. aus Google Maps einsteigen und dabei erklären, dass man in der Mathematik gerne vereinfacht und daraus möglichst allgemeine Aussagen gewinnt.

Dann kann man mit dem Karoblatt je nach Stand der Klasse einen Bezug zum Koordinatensystem herstellen, indem man einen Ursprung wählt und dann dem Punkt M Koordinaten gibt. Dabei kann als Einheit 100 m gewählt werden, sodass sich sehr einfache natürliche Koordinaten ergeben.

Weitere Themen, die angesprochen werden können:

Geometrie bedeutet Erdvermessung. In der Schule geht man von einer Ebene aus. In der Realität ist die Erde eine Kugel und Abstände werden auf Kreisbögen gemessen. Für den Taxifahrer sind Abstände etwas anderes als z.B. für eine Drohne.

Ziel der Stunde:

1. Systematisches Vorgehen (Minimalziel)

Die SuS sollen die Punkte nicht wahllos einzeichnen, sondern systematisch vorgehen:

Z.B.: Wege mit keiner Abbiegung, Wege mit einer Abbiegung, ... Immer zuerst von einem bestimmten Punkt ausgehend.

2. Bezüge zur Geometrie (Abstand, Kreis, Mittelsenkrechte)

Ortslinie Kreis: Menge aller Punkte, die von einem Punkt den gleichen Abstand haben, wird hier zum Quadrat (s.u.). Diese Bezüge nur dann herstellen, wenn die SuS mit den Aufgaben gut zurechtkommen.

1. Aufgabe

Differenzierung: Zuerst nur die Ecken, dann die Diagonalen des Quadrats oder die Seiten des Quadrats entdecken. Es kommt darauf an, was die Schüler zuerst verstehen:

Möglichkeit von abgelenkten Wegen oder das Kleiner-Gleich in der Aufgabe.

Begründung in Worten, warum Punkte außerhalb des Quadrats nicht möglich sind.

Bezug zum Kreis herstellen. In der (euklidischen) Schulgeometrie wäre das ein Kreis. Wenn bekannt, dann kann man sogar auf die Kreiszahl eingehen. Richtig schwierig: Wie groß wäre hier π ? Wird π als Umfang des Kreises geteilt durch den Durchmesser des Kreises definiert, dann kann man einen Taxifahrer einmal entlang der Diagonale und einem „außen herum“ fahren lassen. Als Kreiszahl erhält man dann $\pi = 4$. Es gäbe noch beliebig viele weitere Fragen, z.B. wie viele Schnittpunkte können zwei Taxi-Kreise haben.

2. Aufgabe

a) Differenzierung: Wie viele gibt es bei einer Entfernung von 300 m? (8)

Kann man noch andere Beispiele finden? Wann sind es 4, wann sind es 8?

b) Differenzierung: Die Wege farblich einzeichnen und abzählen.

Wie ist das mit anderen Punkten auf dem Rand des Quadrats?

Wie viele sind es bei einer Entfernung von 100 m, 200 m, 300 m, 500 m, 600 m?

Verallgemeinerung mit Binomialkoeffizienten ist zu schwierig!

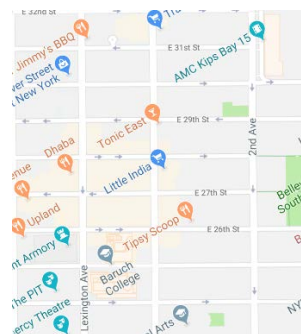
Für Sie die Hintergrund-Info: Legt man den Ursprung in M, dann gibt es vom Punkt $(x|y)$ $\binom{x+y}{x}$ Wege mit der Länge $x+y$.

3. Aufgabe

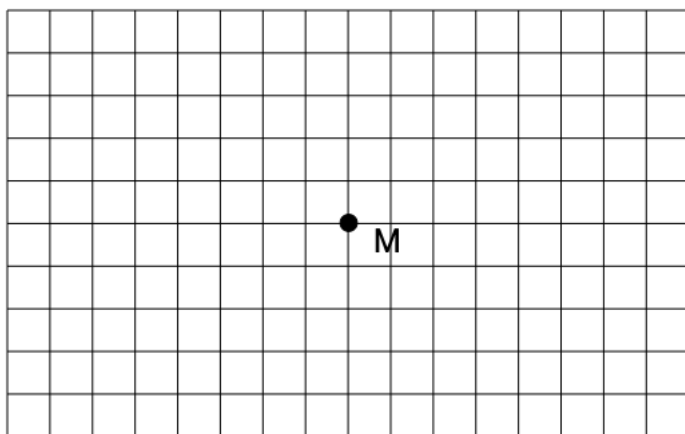
Es müssen nicht alle Varianten betrachtet werden. Für schwächere Schüler reicht es, dass sie die Mittelsenkrechte nur für den Fall a) finden und erkennen, dass im Fall b) diese nicht passt. Man kann als Differenzierung die Punkte M und N auf die Ecken eines Quadrats entlang der Gitterlinien legen. Schön ist auch hier ein Bezug zur Mittelsenkrechte als Ortslinie (wenn das schon bekannt ist), sonst eben kein Bezug.

Kürzeste Entfernungen in Manhattan

Das nebenstehende Bild zeigt einen Stadtplan von Manhattan / New York. Die Straßen verlaufen parallel bzw. senkrecht zueinander. Parallele Straßen sind durchnummeriert. Wir vereinfachen diese Situation ein wenig und stellen uns ein Straßensystem vor, bei dem die Straßen als Gitterlinien auf kariertem Papier verlaufen. In der Geometrie berechnet man kürzeste Entfernungen, sogenannte Abstände. In dem Straßensystem ist aber die kürzeste Entfernung z.B. für einen Taxifahrer oder Fußgänger nicht die Luftlinie, da er sich an die Straßen halten muss. Geometrische Aufgaben verändern sich also in New York erheblich.



Wir nehmen im Folgenden an, dass zwei benachbarte Straßen einen Abstand von 100 m haben. Man kann dann das Straßennetz durch ein Karogitter mit einer Kästchenlänge 100 m darstellen. Verkleinert sieht das dann so aus.



1. Aufgabe

Karolin arbeitet bei McDonald's an der Straßenkreuzung im Punkt M. Sie ist für Umweltschutz und möchte zur Arbeit entlang der Straßen laufen. Die Entfernung von Ihrer Wohnung zu M soll nicht weiter als 400 m sein. Markiere den Bereich, in dem ihre Wohnung liegen darf.

2. Aufgabe

Nimm nun eine Straßenkreuzung an, an der Karolin wohnt. Sie soll genau 400 m zu Fuß von M entfernt sein und Luftlinie möglichst nahe an M liegen.

- Wie viele solche Straßenkreuzungen gibt es?
- Wie viele verschiedene Wege, die genau 400 m lang sind, kann Karolin von ihrer Wohnung zur Arbeit laufen?

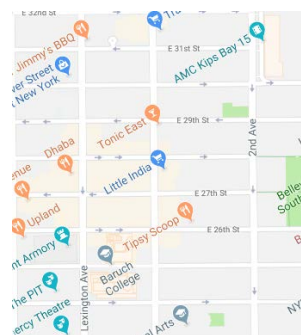
3. Aufgabe

Das Wohnen in New York ist unbezahlbar teuer. Deshalb muss Karolin noch einen zweiten Job annehmen. Der zweite Arbeitsplatz liegt ebenfalls an einer Straßenkreuzung im Punkt N und ist von M 800 m zu Fuß entfernt. Karolin will sich eine neue Wohnung suchen, die genau gleichweit zu Fuß von M und N entfernt ist. Dabei sollen nun auch Wohnorte möglich sein, die weiter als 400 m von den Arbeitsplätzen entfernt sind. Es gibt dann unendlich viele mögliche Wohnorte.

- Beschreibe alle Punkte, die in Frage kommen, wenn M und N an derselben Straße liegen.
- Beschreibe alle Punkte, die in Frage kommen, wenn M und N nicht an derselben Straße liegen. Wähle dazu einen geeigneten Punkt N.

Kürzeste Entfernungen in Manhattan

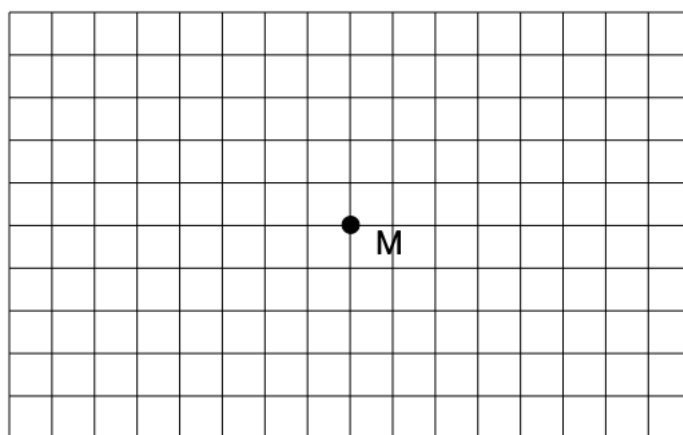
Das nebenstehende Bild zeigt einen Stadtplan von Manhattan / New York. Die Straßen verlaufen parallel bzw. senkrecht zueinander. Parallele Straßen sind durchnummeriert. Wir vereinfachen diese Situation ein wenig und stellen uns ein Straßensystem vor, bei dem die Straßen als Gitterlinien auf kariertem Papier verlaufen. In der Geometrie berechnet man kürzeste Entfernungen, sogenannte Abstände. In dem Straßensystem ist aber die kürzeste Entfernung z.B. für einen Taxifahrer oder Fußgänger nicht die Luftlinie, da er sich an die Straßen halten muss. Geometrische Aufgaben verändern sich also in New York erheblich.



Wir nehmen im Folgenden an, dass zwei benachbarte Straßen einen Abstand von 100 m haben. Man kann dann das Straßennetz durch ein Karogitter mit einer Kästchenlänge 100 m darstellen. Verkleinert sieht das dann so aus.

1. Aufgabe

Karolin arbeitet bei McDonald's an der Straßenkreuzung im Punkt M. Sie ist für Umweltschutz und möchte zur Arbeit entlang der Straßen laufen. Die Entfernung von Ihrer Wohnung zu M soll nicht weiter als 400 m sein. Markiere den Bereich, in dem ihre Wohnung liegen darf.



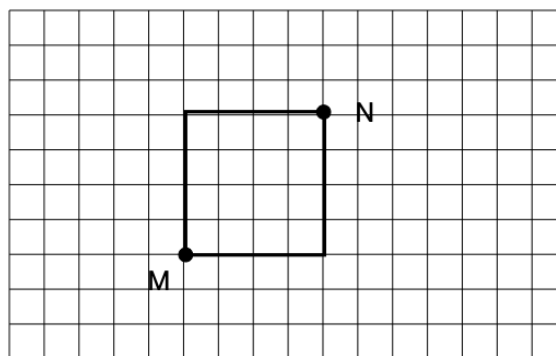
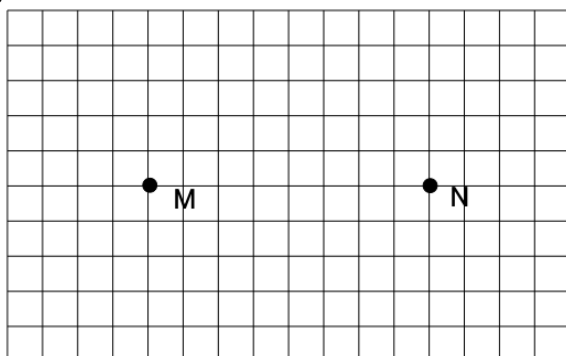
2. Aufgabe

Nimm nun eine Straßenkreuzung an, an der Karolin wohnt. Sie soll genau 400 m zu Fuß von M entfernt sein und Luftlinie möglichst nahe an M liegen.

- Wie viele solche Straßenkreuzungen gibt es?
- Wie viele verschiedene Wege, die genau 400 m lang sind, kann Karolin von ihrer Wohnung zur Arbeit laufen?

3. Aufgabe

Das Wohnen in New York ist unbezahlbar teuer. Deshalb muss Karolin noch einen zweiten Job annehmen. Der zweite Arbeitsplatz liegt ebenfalls an einer Straßenkreuzung im Punkt N und ist von M 800 m zu Fuß entfernt. Karolin will sich eine neue Wohnung suchen, die genau gleichweit zu Fuß von M und N entfernt ist. Dabei sollen nun auch Wohnorte möglich sein, die weiter als 400 m von den Arbeitsplätzen entfernt sind. Es gibt dann unendlich viele mögliche Wohnorte. Untersuche die beiden gezeichneten Fälle.



Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 10 Min.	L - stellt das Problem vor - erinnert an die Bestimmung von Abständen - erläutert das Wesen der Geometrie	Stadtplan von Manhattan, oder aber auch Mannheim
2. Aufgabe 1 EA/PA 10 Min.	SuS - bearbeiten Aufg. 1 L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend Vorbereitung einer Folie, auf der ein S. oder eine Gruppe ihre Lösung einträgt.	Schülerblatt bzw. Schülerblatt B
3. Besprechung Aufgabe 1 FEU 5 Min.	Besprechung an der Tafel, Bezug zum Kreis herstellen, evtl. über Flächeninhalt des Kreises reden	Tafel
4. Aufgabe 2 EA/PA 10 Min	SuS - bearbeiten Aufg. 2 L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Schülerblatt bzw. Schülerblatt B
5. Besprechung Aufgabe 2 FEU 5 Min.	S trägt auf der o.g. Folie die Lösung ein und erläutert sie. Optional: Diskussion, wann gibt es 4, wann gibt es 8 Punkte.	Tafel
6. Aufgabe 3 EA/PA Restliche Zeit, Besprechung je nach Bedarf	SuS - bearbeiten Aufg. 3a L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend 3b (optional bzw. zur Differenzierung). Schülerblatt bzw. Schülerblatt B	Schülerblatt bzw. Schülerblatt B Tafel / Heft?

Sachanalyse

Eine natürliche Zahl n sei hier eine Zahl aus $\{1; 2; 3; \dots\}$. Im Folgenden sind einige Erkenntnisse zu den Quadratzahlen n^2 dargelegt, die in der vorliegenden Stunde geeignet thematisiert werden.

1. Summe ungerader Zahlen:

$$\text{Für alle } n \text{ gilt: } n^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1).$$

In Worten: n^2 ist die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Beispiel: $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$.

Beweis: durch vollständige Induktion unter Verwendung der Umformung $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

2. Vier-Quadratzahlen-Satz von LAGRANGE

Jede natürliche Zahl kann als Summe von höchstens vier Quadratzahlen geschrieben werden.

Ohne Beweis, dafür mit einem Beispiel: $111 = 100 + 9 + 1 + 1 = 10^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$

3. Pythagoreische Tripel

Ein Tripel $(x; y; z)$ natürlicher Zahlen x, y und z heißt pythagoreisches Tripel wenn gilt: $x^2 + y^2 = z^2$.

Nach der Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS ist ein Dreieck mit den Seitenlängen x, y und z eines pythagoreischen Tripels rechtwinklig. Es gilt¹:

Für natürliche u und v mit $u > v$ erhält man mit $x = u^2 - v^2$; $y = 2uv$; $z = u^2 + v^2$ ein pythagoreisches Tripel.

Beweis: Zu zeigen ist, dass gilt $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$.

Dies gelingt mithilfe der Binomischen Formeln: $u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$.

Offensichtlich gilt:

- Ist (x, y, z) ein pythagoreisches Tripel, so ist auch (y, x, z) ein pythagoreisches Tripel.
- Ist (x, y, z) ein pythagoreisches Tripel, so kann man mit $(n \cdot x, n \cdot y, n \cdot z)$ weitere davon „ableiten“. Beispiel: Mit $(3; 4; 5)$ sind auch $(6; 8; 10)$, $(9; 12; 15)$ usw. pythagoreische Tripel. Mit obigem Satz erhält man alle nicht abgeleiteten (= teilerfremden) pythagoreischen Tripel, aber nur einen Teil der abgeleiteten. Z.B. erhält man das abgeleitete Tripel $(9; 12; 15)$ nicht.

Die weitere zugehörige Theorie soll hier nicht entfaltet werden.

Beispiele:

$u =$	2	3	3	4	4	4
$v =$	1	1	2	1	2	3
Pythagoreisches Tripel:	(3; 4; 5)	(8; 6; 10)	(5; 12; 13)	(15; 8; 17)	(12; 16; 20)	(7; 24; 25)

Sortierte teilerfremde pythagoreische Tripel bis 15^2 gibt es nur zwei: $(3; 4; 5)$ und $(5; 12; 13)$.

¹ Dies war schon vor mehr als 2000 Jahren bekannt, vgl. Euklid: Die Elemente: Buch I–XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1980⁷; Zehntes Buch (§ 28a); S. 232f

4. Pythagoreische Quadrupel

Ein Quadrupel $(x; y; z; w)$ natürlicher Zahlen x, y, z und w heißt pythagoreisches Quadrupel wenn gilt: $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$. Man benötigt sie z.B., wenn man nach Quadern mit ganzzahligen Abmessungen und ganzzahliger Länge der Raumdiagonalen sucht.

Hier die neun teilerfremden pythagoreischen Quadrupel sortiert in Gleichungsform und ihre fünf Ableitungen bis 15^2 :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$	$1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$			
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$	$2^2 + 4^2 + 4^2 = 6^2$	$2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2$	$2^2 + 6^2 + 9^2 = 11^2$	$2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$	$3^2 + 6^2 + 6^2 = 9^2$			
$4^2 + 4^2 + 7^2 = 9^2$	$4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2$	$4^2 + 8^2 + 8^2 = 12^2$		
$5^2 + 10^2 + 10^2 = 15^2$				
$6^2 + 6^2 + 7^2 = 11^2$				

5. Anzahl der Quadrate in einem NxN-Quadrat²

In einem NxN-Quadrat gibt es $N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$ Quadrate.

Beispiel: In einem 4x4-Quadrat (vgl. Abbildung rechts) gibt es 4^2 (1x1-Quadrate) + 3^2 (2x2-Quadrate) + 2^2 (3x3-Quadrate) + 1^2 (4x4-Quadrat) = 30 Quadrate.

Beweis: durch vollständige Induktion.

Induktionsverankerung: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $N = 1$.

Induktionsannahme: Sie sei richtig für N .

Induktionsschluss: Zeige, dass sie dann auch für $N+1$ richtig ist.

Es gilt:

Anzahl der 1x1-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der 2x2-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Anzahl der 2x2-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der 3x3-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

(vgl. Abbildung unten für $N = 3$) ...

Anzahl der KxK-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der $(K+1) \times (K+1)$ -Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

...

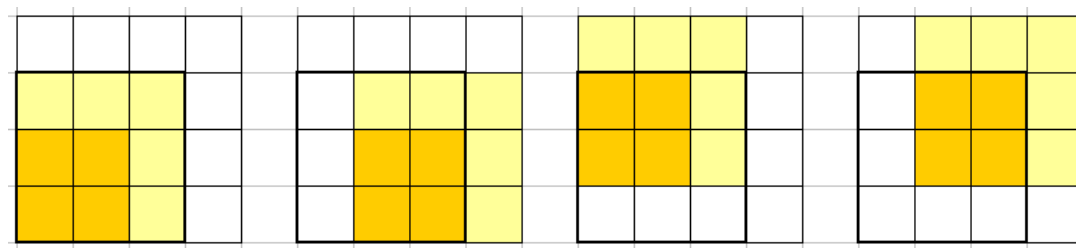
Anzahl der NxN-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Insgesamt gilt:

Anzahl aller Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

Anzahl aller Quadrate im NxN-Quadrat + Anzahl der 1x1-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

$$N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 + (N+1)^2$$



² Verkürzende Schreibweise: Gemeint ist ein NxN-Quadrat-Gitter.

Lehrerblatt

Der Bildungsplan von Baden-Württemberg 2016 weist für das grundlegende und das mittlere Niveau die anzustrebende Kompetenz „Quadratzahlen von 1^2 bis 15^2 wiedergeben und erkennen“ aus¹.

Für die vorliegende Stunde wird davon ausgegangen, dass die Quadratzahlen bereits im Regelunterricht behandelt wurden – wenn nicht, wird man dem ersten Teil mehr Zeit einräumen müssen. Die Kenntnis der Quadratzahlen wird in unterschiedlichen Kontexten „umgewälzt“, damit ergeben sich insgesamt die folgenden **Ziele**:

- die Quadratzahlen von 1^2 bis 15^2 wiedergeben und erkennen
- Kopfrechnen üben
- systematisches Vorgehen üben (z.B. bei der Suche nach Quadratzahldarstellungen)
- mathematische Gesetzmäßigkeiten entdecken und deren Begründung (ansatzweise an Beispielen – ohne die Verwendung von Variablen) verstehen

Der **Ablauf** gliedert sich wie folgt:

- Die Quadratzahlen werden im fragendentwickelnden Unterricht „vorwärts und rückwärts“ wiederholt, z.B. so:
Die Lehrkraft hat 15 Blätter (am besten kartoniert wegen der Steifigkeit) beschriftet jeweils mit der Grundzahl auf einer Seite und der zugehörigen Quadratzahl auf der anderen Seite und zeigt in bunter Reihung jeweils ein Blatt mit einer beliebigen Seite. Die Schülerinnen und Schüler sagen die Zahl auf der Rückseite des Blattes – zur Grundzahl also die Quadratzahl und umgekehrt².
- **Binnendifferenzierung:** Je nach zur Verfügung stehender Zeit und Leistungsfähigkeit der Lerngruppe wird das Arbeitsblatt in Einzel- bzw. Partnerarbeit oder teilweise bzw. ansatzweise im fragendentwickelnden Unterricht bearbeitet.
Die Lehrkraft lobt, unterstützt und berät zurückhaltend.
- Bei den Aufgaben 5 und 6 wird man ausgehend vom Ergebnis es zunächst mit der nächst kleineren Quadratzahl als ersten Summanden probieren, wenn das keine Summendarstellung liefert mit der nächstkleineren Quadratzahl usw., desgleichen beim zweiten Summanden usw.
- Zum Abschluss werden die Ergebnisse verglichen, ggf. wird der Zusammenhang zwischen den Aufgaben 3 und 4 vertieft und die Vorgehensweise bei den Aufgaben 5 und 6 reflektiert.

Mögliche **Erweiterungen** des Programms:

- Die Liste der Quadratzahlen bis $20^2 = 400$ erweitern mit Hilfe der ungeraden Zahlen:
 $15^2 = 14^2 + 29$, also $16^2 = 15^2 + 31 = 225 + 31 = 256$ usw.
bzw. $16^2 = 15^2 + 2 \cdot 15 + 1 = 256$ (vgl. Arbeitsblatt Aufgabe 4) usw.
- Beliebige Zahlen als Summe von höchstens vier Quadratzahlen³ darstellen lassen (Satz von LAGRANGE – vgl. Sachanalyse),
z.B. $55 = 49 + 4 + 1 + 1$ oder $111 = 100 + 9 + 1 + 1$ oder $188 = 144 + 36 + 4 + 4$
oder $240 = 196 + 36 + 4 + 4$.

¹ Im erweiterten Niveau „... von 1^2 bis 20^2 ...“

² Man könnte auch noch einige Blätter mit Zahlen beschriften, die keine Quadratzahlen sind ☹. Die Schülerinnen und Schüler müssten das erkennen und dann sagen „Keine Quadratzahl!“.

³ Nach dem Drei-Quadrate-Satz von GAUß kommt man mit drei Quadratzahlen nicht aus für Zahlen der Form $4^a \cdot (8-b+7)$ mit a bzw. $b = 0; 1; 2; \dots$. Das wäre also die Zahlen 7; 15; 23; 28; 31; 39; 47; 55; Für die Zahl 7 kann man das durch Nachrechnen leicht bestätigen. 111 ($a = 0$ und $b = 13$); 188 ($a = 1$ und $b = 5$) und 240 ($a = 2$ und $b = 1$) sind auch solche Zahlen.

Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

1. Einerziffern von Quadratzahlen:

Einige der zehn Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0 kommen nicht als Einerziffern von Quadratzahlen vor.

Diese vier Ziffern kommen nicht vor, **trage** sie **ein**:

2. Quadratzahlen erkennen:

Verdecke die Tabelle der Quadratzahlen oben und **streiche** aus der Liste die Zahlen, die **keine Quadratzahlen** sind: 24; 121; 66; 196; 36; 96; 125; 88; 200; 169; 44; 333

3. Quadratzahlen als Summe ungerader Zahlen:

Lars hat eine Entdeckung gemacht, er sagt:

„Ich addiere die ersten **3** ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5$ und erhalte **9**, und **3^2** ist auch **9**.“

Lisa sagt:

„Ich probiere das einmal mit der **4**.“

Ich addiere die ersten **4** ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5 + 7$ und erhalte **16**, und **4^2** ist auch **16**.“

Probiere du es mit der Zahl **5**.

..... Stimmt es?

Probiere du es mit der Zahl **9**.

..... Stimmt es?

4. Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

Lies den Text aufmerksam durch und **betrachte** dabei die Zeichnung rechts:

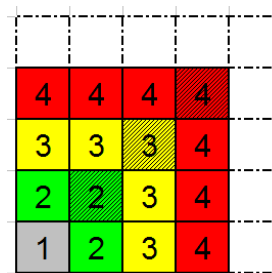
$1^2 = 1$, nämlich 1 Karo links unten (Karo = Quadrätchen)

$2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1^2 + 3$, nämlich 1^2 Karo links unten und zusätzlich

1 Karo darüber, **1** Karo rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben

$3^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 2^2 + 5$, nämlich 2^2 Karos links unten und zusätzlich

2 Karos darüber, **2** Karos rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben



Trage die fehlenden Zahlen und die Antwort (unten) **ein**:

$4^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 3^2 + 7$, nämlich 3^2 Karos links unten und zusätzlich

..... Karos darüber, ... Karos rechts und Karo in der Ecke rechts oben

$5^2 = 4^2 + \dots = 4^2 + \dots$, nämlich Karos links unten und zusätzlich

..... Karos darüber, ... Karos rechts und Karo in der Ecke rechts oben

Frage: Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

Antwort:

Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

5. Quadratzahl als Summe zweier Quadratzahlen

Es gilt $289 = 225 + 64$.

Im Bereich bis 225 gibt es aber nur vier Quadratzahlen, die die Summe von zwei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$25 = \boxed{} + \boxed{}$$

$$100 = \boxed{} + \boxed{}$$

$$169 = \boxed{} + \boxed{}$$

$$225 = \boxed{} + \boxed{}$$

6. Quadratzahl als Summe dreier Quadratzahlen

Es gilt $121 = 81 + 36 + 4$.

Im Bereich bis 225 gibt es einige weitere Quadratzahlen, die die Summe von drei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$9 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

$$36 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

$$49 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

$$81 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

$$144 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

$$169 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

$$196 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

$$225 = \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

7. Anzahl der Quadrate

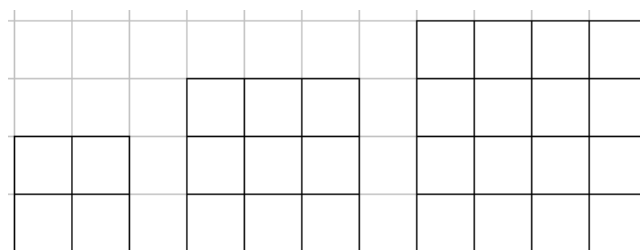
In einem 2×2 -Quadrat (linke Abbildung) gibt es insgesamt fünf Quadrate, nämlich vier 1×1 -Quadrate und ein 2×2 -Quadrat.

a) Wie viele Quadrate gibt es in einem 3×3 -Quadrat (mittlere Abbildung)?

b) Wie viele Quadrate gibt es in einem 4×4 -Quadrat (rechte Abbildung)?

Schreibe zunächst einzeln auf, wie viele 1×1 -Quadrate (.....), wie viele 2×2 -Quadrate (.....), wie viele 3×3 -Quadrate (.....) und wie viele 4×4 -Quadrate (.....) es sind.

c) Wie viele Quadrate gibt es vermutlich in einem 5×5 -Quadrat?



Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

1. Einerziffern von Quadratzahlen:

Einige der zehn Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0 kommen nicht als Einerziffern von Quadratzahlen vor.

Diese Ziffern kommen nicht vor, **trage** sie ein:

2	3	7	8

2. Quadratzahlen erkennen:

Verdecke die Tabelle der Quadratzahlen oben und **streiche** aus der Liste die Zahlen, die **keine Quadratzahlen** sind: ~~24~~; 121; ~~66~~; ~~196~~; 36; ~~96~~; ~~125~~; ~~88~~; ~~200~~; 169; 44; ~~333~~

3. Quadratzahlen als Summe ungerader Zahlen:

Lars hat eine Entdeckung gemacht, er sagt:

„Ich addiere die ersten **3** ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5$ und erhalte **9**, und **3^2** ist auch **9**.“

Lisa sagt:

„Ich probiere das einmal mit der **4**.

Ich addiere die ersten **4** ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5 + 7$ und erhalte **16**, und **4^2** ist auch **16**.“

Probiere du es mit der Zahl **5**.

Summe der ersten **5** ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$ und auch **$5^2 = 25$** Stimmt es? **Ja**.

Probiere du es mit der Zahl **9**.

Summe der ersten **9** ungeraden Zahlen: $1 + 3 + \dots + 13 + 15 + 17 = \mathbf{81}$ und auch **$9^2 = 81$** Stimmt es? **Ja**.

4. Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

Lies den Text aufmerksam durch und **betrachte** dabei die Zeichnung rechts:

$\boxed{1^2} = 1$, nämlich 1 Karo links unten (Karo = Quadrätchen)

$\boxed{2^2} = 1^2 + \mathbf{2 \cdot 1 + 1} = \boxed{1^2} + \mathbf{3}$, nämlich 1^2 Karo links unten und zusätzlich

1 Karo darüber, **1** Karo rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben

$\boxed{3^2} = 2^2 + \mathbf{2 \cdot 2 + 1} = \boxed{2^2} + \mathbf{5}$, nämlich 2^2 Karos links unten und zusätzlich

2 Karos darüber, **2** Karos rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben

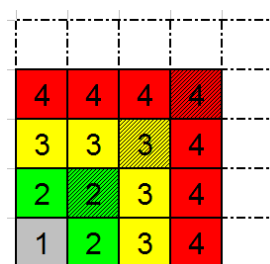
Trage die fehlenden Zahlen und die Antwort (unten) **ein**:

$\boxed{4^2} = 3^2 + \mathbf{2 \cdot 3 + 1} = \boxed{3^2} + \mathbf{7}$, nämlich 3^2 Karos links unten und zusätzlich

3 Karos darüber, **3** Karos rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben

$\boxed{5^2} = 4^2 + \mathbf{2 \cdot 4 + 1} = \boxed{4^2} + \mathbf{9}$, nämlich 4^2 Karos links unten und zusätzlich

4 Karos darüber, **4** Karos rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben



Frage: Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

Antwort: **Man addiert immer die nächste ungerade Zahl.**

Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

5. Quadratzahl als Summe zweier Quadratzahlen

Es gilt $289 = 225 + 64$.

Im Bereich bis 225 gibt es aber nur vier Quadratzahlen, die die Summe von zwei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$25 = \boxed{16} + \boxed{9}$$

$$100 = \boxed{64} + \boxed{36}$$

$$169 = \boxed{144} + \boxed{25}$$

$$225 = \boxed{144} + \boxed{81}$$

6. Quadratzahl als Summe dreier Quadratzahlen

Es gilt $121 = 81 + 36 + 4$.

Im Bereich bis 225 gibt es einige weitere Quadratzahlen, die die Summe von drei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$9 = \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{1}$$

$$36 = \boxed{16} + \boxed{16} + \boxed{4}$$

$$49 = \boxed{36} + \boxed{9} + \boxed{4}$$

$$81 = \boxed{64} + \boxed{16} + \boxed{4}$$

$$144 = \boxed{64} + \boxed{64} + \boxed{16}$$

$$169 = \boxed{144} + \boxed{16} + \boxed{9}$$

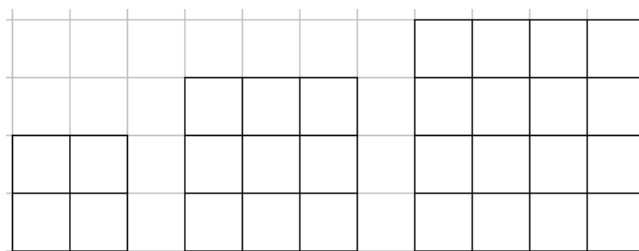
$$196 = \boxed{144} + \boxed{36} + \boxed{16}$$

$$225 = \boxed{196} + \boxed{25} + \boxed{4}$$

7. Anzahl der Quadrate

In einem 2x2-Quadrat (linke Abbildung) gibt es insgesamt fünf Quadrate, nämlich vier 1x1-Quadrate und ein 2x2-Quadrat.

- a) Wie viele Quadrate gibt es in einem 3x3-Quadrat (mittlere Abbildung)? **14**
- b) Wie viele Quadrate gibt es in einem 4x4-Quadrat (rechte Abbildung)? **30**



Schreibe zunächst einzeln auf, wie viele 1x1-Quadrate (**16**), wie viele 2x2-Quadrate (**9**), wie viele 3x3-Quadrate (**4**) und wie viele 4x4-Quadrate (**1**) es sind.

c) Wie viele Quadrate gibt es vermutlich in einem 5x5-Quadrat? **$25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$**

Lehrerblatt

Das Thema *römisches Zahlssystem* nennt der gemeinsame Bildungsplan 2016 explizit nur für das mittlere Niveau. Im erweiterten Niveau wird an der entsprechende Stelle nur von einem *anderen Zahlssystem* gesprochen.

Vielfach wird der Umgang mit römischen Zahlzeichen (verkürzende Sprech- und Schreibweise: *römische Zahlen*) samt zugehörigem Regelwerk jedoch als ein unverzichtbares Bildungsgut angesehen.

Sachanalyse:

Die römischen Zahlzeichen sind: I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

(Eine mögliche Merkregel: Ich **V**erkaufe **X** Leuten **C**omics **D**rei **M**al)

Weitere Zahlen entstehen dadurch, dass man mehrere Zeichen (das sind die Zahlzeichen und die Subtraktionspaare aus (R4)) aneinanderreicht.

Dabei sollen die folgenden vier Regeln (R1) bis (R4) gelten:

(R1) ... Die verwendeten Zeichen werden der Größe nach aufgeschrieben (beginnend mit dem größten) und die zugehörigen Werte addiert.

(R2) ... Die Zeichen C, X und I stehen höchstens dreimal nebeneinander.

(R3) ... Die Zeichen D, L und V stehen nicht mehrmals nebeneinander.

(R4) ... Kommt im Zehnersystem die Ziffer 4 oder die Ziffer 9 vor, verwendet man jeweils eines der sechs Subtraktions-Paare, sonst aber nicht: $\boxed{IV}$ = 4; $\boxed{IX}$ = 9; $\boxed{XL}$ = 40; $\boxed{XC}$ = 90; $\boxed{CD}$ = 400; $\boxed{CM}$ = 900.

Man erkennt sie daran, dass hier ein Zahlzeichen links von einem größeren steht, hierbei wird das kleinere vom größeren subtrahiert. Es kann nur eines der Zeichen I, X oder C subtrahiert werden.

Bemerkung: Die Formulierung des Regelwerkes (R1) bis (R4) mithilfe der Subtraktions-Paare (das kommt so in den Schulbüchern nicht vor) zielt auf die Eindeutigkeit der Darstellung.

Hin- und Herübersetzung – Beispiele:

Übersetzung vom Dezimalsystem ins römische Zahlssystem:

- Markiere ggf. vorab die Ziffern „4“ und „9“ mit einem Kästchen. Übersetze mithilfe der zur Verfügung stehenden Zeichen und der Regeln (R1) bis (R4).

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1 = V I I I$$

$$32 = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = X X X I I$$

$$120 = 100 + 10 + 10 = C X X$$

$$346 = 100 + 100 + 100 + \boxed{40} + 5 + 1 = C C C \boxed{XL} V I$$

$$1789 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + \boxed{9} = M D C C L X X X \boxed{IX}$$

Übersetzung vom römischen Zahlssystem ins Dezimalsystem:

- Markiere ggf. vorab die auftretenden Subtraktionspaare mit einem Kästchen. Übersetze die Zeichen und addiere.

$$L X I I = 50 + 10 + 1 + 1 = 62$$

$$M D X V = 1000 + 500 + 10 + 5 = 1515$$

$$M M C C L I I I = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 50 + 1 + 1 + 1 = 2253$$

$$C \boxed{XC} I = 100 + 90 + 1 = 191$$

$$\boxed{CD} X \boxed{IV} = 400 + 10 + 4 = 414$$

Verlauf:

Die Lehrkraft führt anhand des Arbeitsblattes – je nach Vorkenntnissen der Lerngruppe – ins römische Zahlssystem ein bzw. wiederholt die Kenntnisse. Einige Beispiele, s.o. werden gemeinsam bearbeitet. Das **Markieren** der Ziffern 4 und 9 bzw. der Subtraktionspaare **mithilfe von Kästchen** ist ein ganz zentraler Punkt.

In Abhängigkeit vom Kenntnisstand wird man bei der **Einführung** zügiger oder weniger zügig vorgehen.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die **Aufgaben des Arbeitsblattes** in Einzel- oder Partnerarbeit und kommen dabei, auch in Abhängigkeit von ihren Vorkenntnissen, unterschiedlich weit.

Ziele:

- das römische Zahlssystem kennen
- übergeordnet: ein Regelwerk verstehen und anwenden

Lösungen der Aufgaben des Arbeitsblattes:

$$1a) 17 = 10 + 5 + 1 + 1 = \text{XVII}$$

$$1b) 85 = 50 + 10 + 10 + 10 + 5 = \text{LXXXV}$$

$$1c) 104 = 100 + 4 = \text{CIV}$$

$$1d) 455 = 400 + 50 + 5 = \text{CDLV}$$

$$1e) 890 = 500 + 100 + 100 + 100 + 90 = \text{DCCCXC}$$

$$1f) 1001 = 1000 + 1 = \text{MI}$$

$$1g) 1947 = 1000 + 900 + 40 + 5 + 1 + 1 = \text{MCMXLVII}$$

$$1h) 4949 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 900 + 40 + 9 = \text{MMMMCMXLIX}$$

$$2a) \text{XIII} = 10 + 1 + 1 + 1 = 13$$

$$2b) \text{XXVI} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$$

$$2c) \text{CCC} = 100 + 100 + 100 = 300$$

$$2d) \text{CDIII} = 400 + 1 + 1 + 1 = 403$$

$$2e) \text{DCIII} = 500 + 100 + 1 + 1 + 1 = 603$$

$$2f) \text{MCMXI} = 1000 + 900 + 90 + 1 = 1991$$

$$3a) \text{Regierungszeit 25 Jahre}$$

$$3b) \text{am 30.10.1841}$$

$$4a) \text{IC} = 100 - 1 = 99; \text{IC} \text{ ist kein mögliches Subtraktions-Paar;}$$

$$\text{Verbesserung: } 99 = 90 + 9 = \text{XCIX}$$

$$4b) \text{DVD} = 500 + 500 - 5 = 995; \text{VD} \text{ ist kein mögliches Subtraktions-Paar;}$$

$$\text{Verbesserung: } 995 = 900 + 90 + 5 = \text{CMXCV}$$

$$4c) \text{LIDL} = 50 + (500 - 1) + 50 = 599; \text{ID} \text{ ist kein mögliches Subtraktions-Paar, die Zeichen sind nicht der Größe nach aufgeschrieben;}$$

$$\text{Verbesserung: } 599 = 500 + 90 + 9 = \text{DXIX}$$

$$5a) \text{gegen (R1)}$$

$$5b) \text{gegen (R2)}$$

$$5c) \text{gegen (R3)}$$

$$5d) \text{gegen (R4)}$$

$$6a) 941$$

$$6b) \text{CCCCLXXXIII}$$

Die römischen Zahlzeichen sind: I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

(Eine mögliche Merkmregel: Ich **V**erkaufe **X** Leuten **C**omics **D**rei **M**al)

Weitere Zahlen entstehen dadurch, dass man mehrere dieser Zeichen aneinanderreihet.

Dabei sollen die folgenden vier Regeln **(R1)** bis **(R4)** gelten:

(R1) ... Die verwendeten Zeichen werden **der Größe nach** aufgeschrieben (beginnend mit dem größten) und die zugehörigen Werte addiert.

(R2) ... Die Zeichen **C, X und I** stehen **höchstens dreimal** nebeneinander.

(R3) ... Die Zeichen **D, L und V** stehen **nicht mehrmals** nebeneinander.

(R4) ... Kommt im Zehnersystem die Ziffer 4 oder die Ziffer 9 vor, verwendet man jeweils eines der **sechs Subtraktions-Paare**, sonst aber nicht: $\boxed{\text{IV}}$ = 4; $\boxed{\text{IX}}$ = 9; $\boxed{\text{XL}}$ = 40; $\boxed{\text{XC}}$ = 90; $\boxed{\text{CD}}$ = 400; $\boxed{\text{CM}}$ = 900.

Man erkennt sie daran, dass hier ein Zahlzeichen links von einem größeren steht, hierbei wird das kleinere vom größeren subtrahiert.

Es kann nur eines der Zeichen I, X oder C subtrahiert werden.

1.) Schreibe mit römischen Zahlzeichen. Markiere zuerst die Ziffern „4“ und „9“ mit einem Kästchen.

a) 17 = ... b) 85 = ...

c) 104 = ... d) 455 = ...

e) 890 = ... f) 1001 = ...

g) 1947 = ... h) 4949 = ...

2.) Übersetze ins Zehnersystem. Markiere dazu die auftretenden Subtraktionspaare mit einem Kästchen.

a) XIII = ... b) XXVI = ...

c) CCC = ... d) CDIII = ...

e) DCIII = ... f) MCMXCI = ...

3.) Inschrift auf der Jubiläumsäule auf dem Schloßplatz in Stuttgart, die aus Anlass des ??-jährigen Regierungsjubiläums von König Wilhelm der Erste von Württemberg im Jahr ???? errichtet wurde.

- a) Wie lange war König Wilhelm I. bei diesem Jubiläum an der Regierung?
 b) Wann war dieses Jubiläum?



4.) Welche Zahl ist möglicherweise gemeint? Verbessere.

a) I C

b) D V D

c) L I D L

5.) Gegen welche der Regeln (R1) bis (R4) wurde hier verstoßen?

a) X X C b) C X X X X c) L L X d) X M

6.) Asterix findet das römische Zahlensystem zu kompliziert und doof.

Er und Obelix verwenden ein vereinfachtes System.

(R4) ist komplett gestrichen und (R2) heißt jetzt:

Die Zeichen **C, X und I** stehen **höchstens viermal** nebeneinander.

a) Was verstehen Asterix und Obelix unter D C C C X X X I ?

b) Wie heißt 494 bei Asterix und Obelix?

Lehrerblatt

Didaktischer Kommentar:

Die Geläufigkeit des Zahlenrechnens bei den Schülerinnen und Schülern ist im Laufe der letzten Jahre etwas ins Hintertreffen gekommen mit der Folge, dass kompliziertere mathematische Sachverhalte – aufgrund des fehlenden numerischen Überblicks – nicht oder nicht in wünschenswerter Tiefe erfasst werden können.

Die vorliegende Stunde „Rückwärtsrechnen“ verbindet das Kopfrechnen mit der Strategie der Analyse einer Situation mithilfe der Umkehraufgabe – hier des Rückwärtsrechnens („Die Sache vom Ende her denken.“) – vgl. Bildungsplan 2016 für alle Niveaustufen:

- Rechnungen unter Verwendung der Umkehroperation überprüfen
- einfache Aufgaben mit Unbekannten durch Ausprobieren oder Rückwärtsrechnen lösen

An das Zusammenfassen von Termen ist dabei nicht gedacht.

Nach einer Einführung im fragendentwickelnden Unterricht folgt eine Übungsphase mit einem vorstrukturierten Arbeitsblatt, um die Konzentration auf das Zahlenrechnen und die korrekte Organisation des Rückwärtsrechnens zu ermöglichen.

Besonderer Wert wird auf die **Durchführung der Probe** gelegt. Auch hier eröffnet sich eine weitere grundsätzliche Absicht (Non scholae, sed vitae discimus¹):

Ein Ergebnis zu **erzeugen** ist eine Sache, sich von dessen Korrektheit zu **überzeugen** eine zweite.

Können die Schülerinnen und Schüler mit einzelnen Zahlarten noch nicht rechnen, muss das Arbeitsblatt geeignet angepasst werden.

Binnendifferenzierung: Bei Bedarf kann die Lehrkraft ggf. spontan weitere Aufgaben in beliebigem Schwierigkeitsgrad erfinden² und die drei Operationen und das Ergebnis mitteilen. Die Schülerinnen und Schülern arbeiten dann mit dem Leerformular.

Möchte man etwa das Multiplizieren und Dividieren von Dezimalzahlen üben, würde sich z.B. die folgende Aufgabe anbieten:

	→		→		→	2
Startzahl	· 0,5		: 0,6		· 4	

2	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Möchte man es „richtig“ anspruchsvoll machen, würde sich z.B. die folgende Aufgabe anbieten:

$\frac{3}{8}$	→		→		→	$-\frac{2}{27}$
Startzahl	: 0,45		$-\frac{10}{9}$		: 3,75	

$-\frac{2}{27}$	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Ziele:

- Kopfrechnen (Zwischenergebnisse werden notiert) im Bereich der natürlichen Zahlen, der rationalen Zahlen in Bruch- und Dezimaldarstellung sowie der negativen Zahlen
- das Prinzip des Rückwärtsrechnens (Umkehroperation in umgekehrter Reihenfolge) richtig anwenden

¹ Nicht für die Schule, sondern für das Leben lernen wir.

² Startzahl ausdenken | erste Operation ausdenken und erstes Zwischenergebnis ausrechnen | zweite Operationen ausdenken und zweites Zwischenergebnis ausrechnen | dritte Operationen ausdenken und Endergebnis ausrechnen | die drei Operationen und das Ergebnis als Aufgabenstellung formulieren

Bestimme die Startzahl aus dem Ergebnis durch Rückwärtsrechnen (rechts). **Mache** die Probe (links).

Aufgabe 1:

	→		→		→	150
Startzahl	: 12		· 6		· 5	

150	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe 2:

	→		→		→	51
Startzahl	· 3		+ 6		· 2	

51	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe 3:

	→		→		→	3
Startzahl	: 0,5		+ 5		: 9	

3	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe 4:

	→		→		→	11,1
Startzahl	: 0,2		+ 5,5		: 5	

11,1	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe 5:

	→		→		→	15
Startzahl	: 3		: 9		· 10	

15	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe 6:

	→		→		→	6
Startzahl	- 15		: 5		· (-3)	

6	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe 7:

	→		→		→	$\frac{15}{2}$
Startzahl	· 4		$-\frac{1}{6}$		· 3	

$\frac{15}{2}$	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe 8:

	→		→		→	2
Startzahl	$\cdot \frac{6}{5}$		$:\frac{3}{10}$		$+\frac{2}{3}$	

2	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Zur Überprüfung: Die Summe der acht Startzahlen muss 134 ergeben.

Bestimme die Startzahl aus dem Ergebnis durch Rückwärtsrechnen (rechts). **Mache** die Probe (links).

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Aufgabe :

	→		→		→	
Startzahl						

	→		→		→	
Ergebnis						Startzahl

Bestimme die Startzahl aus dem Ergebnis durch Rückwärtsrechnen (rechts). **Mache** die Probe (links).

Aufgabe 1:

60	→	5	→	30	→	150
Startzahl	: 12		· 6		· 5	✓

150	→	30	→	5	→	60
Ergebnis	: 5		: 6		· 12	Startzahl

Aufgabe 2:

6,5	→	19,5	→	25,5	→	51
Startzahl	· 3		+ 6		· 2	✓

51	→	25,5	→	19,5	→	6,5
Ergebnis	: 2		- 6		: 3	Startzahl

Aufgabe 3:

11	→	22	→	27	→	3
Startzahl	: 0,5		+ 5		: 9	✓

3	→	27	→	22	→	11
Ergebnis	· 9		- 5		· 0,5	Startzahl

Aufgabe 4:

10	→	50	→	55,5	→	11,1
Startzahl	: 0,2		+ 5,5		: 5	✓

11,1	→	55,5	→	50	→	10
Ergebnis	· 5		- 5,5		· 0,2	Startzahl

Aufgabe 5:

40,5	→	13,5	→	1,5	→	15
Startzahl	: 3		: 9		· 10	✓

15	→	1,5	→	13,5	→	40,5
Ergebnis	: 10		· 9		· 3	Startzahl

Aufgabe 6:

5	→	-10	→	-2	→	6
Startzahl	- 15		: 5		· (-3)	✓

6	→	-2	→	-10	→	5
Ergebnis	: (-3)		· 5		+ 15	Startzahl

Aufgabe 7:

$\frac{2}{3}$	→	$\frac{8}{3}$	→	$\frac{15}{6}$	→	$\frac{15}{2}$
Startzahl	· 4		- $\frac{1}{6}$		· 3	✓

$\frac{15}{2}$	→	$\frac{15}{6}$	→	$\frac{8}{3}$	→	$\frac{2}{3}$
Ergebnis	: 3		+ $\frac{1}{6}$		: 4	Startzahl

Aufgabe 8:

$\frac{1}{3}$	→	$\frac{2}{5}$	→	$\frac{4}{3}$	→	2
Startzahl	· $\frac{6}{5}$		: $\frac{3}{10}$		+ $\frac{2}{3}$	✓

2	→	$\frac{4}{3}$	→	$\frac{2}{5}$	→	$\frac{1}{3}$
Ergebnis	- $\frac{2}{3}$		· $\frac{3}{10}$		: $\frac{6}{5}$	Startzahl

Die Summe der acht Startzahlen muss 134 ergeben: $60 + 6,5 + 11 + 10 + 40,5 + 5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 134$ ✓

Stundenverlauf

Einstieg:

Zum Einstieg führt die Lehrkraft als Zahlenzauberer einen Zaubertrick mit einem freiwilligen Schüler durch:

Denke dir eine Zahl. Nimm sie mal 3. Addiere zum Ergebnis 6. Verdopple dieses Ergebnis. Welche Zahl hast du heraus bekommen?

Antwort des Schülers, z.B.: 42.

Feststellung des Zahlenzauberers: *Du hast dir die Zahl 5 gedacht.*

Tipps zur Durchführung: Die gedachte Zahl sollte nicht zu groß (also zum Beispiel einstellig) sein, so dass sich Rechnungen leicht bewerkstelligen lassen. Wenn der Schüler sich verrechnet, verpufft der Effekt des Zaubertricks.

Deshalb ggf.: Rechnungen an die Tafel schreiben, zu zweit rechnen lassen, gedachte Zahl und Zwischenergebnisse notieren lassen. Erfahrungsgemäß ist es wichtig zu betonen, dass immer mit dem jeweiligen Ergebnis weitergerechnet werden soll.

Frage der Lehrkraft: *Wie habe ich das gemacht?*

Antwort der Schülerinnen und Schüler sinngemäß (hoffentlich): *Durch Rückwärtsrechnen, also durch Anwenden der jeweiligen Umkehroperationen in der umgekehrten Reihenfolge.*

Erarbeitung und Tafelanschrieb:

In der angegebenen Reihung – auf die Rahmenlinien kann verzichtet werden¹:

Schritt 1: Gegebene Operationen notieren und Ergebnis eintragen, Rückwärtsarbeiten vorbereiten

	→	...	→	...	→	42		42	→	...	→	...	→	
Startzahl	· 3		+ 6		· 2			Ergebnis						Startzahl

Schritt 2 (rechte Seite): Umkehroperationen in umgekehrter Reihenfolge eintragen

	→	...	→	...	→	42		42	→	...	→	...	→	
Startzahl	· 3		+ 6		· 2			Ergebnis	: 2		– 6		: 3	Startzahl

Schritt 3 (rechte Seite): Zwischenergebnisse der Umkehroperationen und gesuchte Startzahl eintragen

	→	...	→	...	→	42		42	→	21	→	15	→	5
Startzahl	· 3		+ 6		· 2			Ergebnis	: 2		– 6		: 3	Startzahl

Schritt 4 (linke Seite): zur Probe – die gefundene Startzahl und Zwischenergebnisse eintragen
Stimmt das Ergebnis? Wenn ja, „✓“ setzen, sonst nachrechnen.

5	→	15	→	21	→	42		42	→	21	→	15	→	5
Startzahl	· 3		+ 6		· 2	✓		Ergebnis	: 2		– 6		: 3	Startzahl

Übung:

Wie im gezeigten Beispiel wird vorab eine der Aufgaben des Schüler-Arbeitsblattes gemeinsam bearbeitet, anschließend füllen die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit bei den Aufgaben des Arbeitsblattes die Leerstellen ebenso jeweils die drei Schritte 2, 3 und 4 aus. Schritt 1 ist auf dem Arbeitsblatt jeweils ja schon vorbereitet.

¹ Um den Eintragungsprozess zu veranschaulichen sind hier vier Tabellen gezeigt, an der Tafel steht natürlich nur eine Tabelle, nämlich – nach allen erfolgten Eintragungen – die letzte.

Lehrerblatt

Unterstufenschüler lassen sich erfahrungsgemäß von Aufgaben mit „schönen“ Ergebnissen begeistern. Man denkt hier zuerst wohl an schriftliche Rechnungen mit den vier Grundrechenarten, wie z.B.:

a) Musteraufgabe Addition: b) Musteraufgabe Subtraktion: c) Musteraufgabe Multiplikation: d) Musteraufgabe Division:

$$\begin{array}{r} 374619 \\ +736492 \\ \hline 1111111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 374619 \\ -152397 \\ \hline 222222 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 328 \cdot 271 \\ \hline 656 \\ 2296 \\ 328 \\ \hline 88888 \end{array}$$

$$86415 : 7 = 12345$$

Wie kommt man zu solchen Aufgaben?

Binnendifferenzierung: Bei der folgenden Erarbeitung kann die Lehrkraft je nach Leistungsvermögen der Lerngruppe mehr oder weniger vorgeben bzw. lenken.

Zu a): Das Ergebnis soll 1111111 heißen. Wie lauten die beiden Summanden?

→ Wähle einen Summanden beliebig sechstellig, z.B. 374619, berechne dann den zweiten Summanden zu $1111111 - 374619 = 736492$.

Zu b): Das Ergebnis soll 222222 heißen. Wie lauten Minuend und Subtrahend?

→ Wähle den Minuenden größer als 222222, z.B. 374619, berechne dann den Subtrahenden zu $374619 - 222222 = 152397$.

(Alternative: → Wähle den Subtrahenden sechstellig, z.B. 152397, berechne dann den Minuenden zu $222222 + 152397 = 374619$.)

Zu c): Das Ergebnis soll 88888 heißen. Wie lauten die beiden Faktoren?

Man könnte nun auf die Idee kommen, einen der beiden Faktoren beliebig zu wählen, z.B. 345.

Der zweite Faktor würde sich dann durch Division $88888 : 345 = 257,64637...$ ergeben. Man möchte aber zwei natürliche Zahlen als Faktoren.

→ Betrachte die Primfaktorenzerlegung von 88888, es ist $88888 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 41 \cdot 271$.

Fasse die Primfaktoren zu zwei Faktoren zusammen, z.B. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 41 = 328$ und $1 \cdot 271 = 271$.

Wie kommt man zu einer Primfaktorenzerlegung von z.B. 88888?

- GeoGebra liefert diese mit dem Befehl *Primfaktoren(88888)*.
- Im Internet gibt es diverse Angebote, z.B.: <https://rechneronline.de/primfaktoren/>

Zu d): Das Ergebnis soll 12345 heißen. Wie lauten Divisor und Dividend?

→ Wähle einen Divisor, z.B. 7 (wegen der Handhabbarkeit empfiehlt sich ein Divisor kleiner als 20), und berechne den Dividenten zu $12345 \cdot 7 = 86415$.

Ziele:

- schriftliches Rechnen mit den vier Grundrechenarten
- dabei die Fachbegriffe für die Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division), Rechenoperationen (addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren) und Rechenoperanden (Summand, Faktor, Minuend, Subtrahend, Dividend, Divisor) verwenden
- die Nützlichkeit der Primfaktorenzerlegung einer Zahl kennen lernen, das Assoziativgesetz der Multiplikation anwenden
- **Strategie:** Analyse einer Situation durch das Lösen der Umkehraufgabe („Die Sache vom Ende her denken.“)

1a) $\begin{array}{r} 195837 \\ +137496 \\ \hline \end{array}$	1b) $\begin{array}{r} 918325 \\ -473881 \\ \hline \end{array}$	1c) $643 \cdot 192$
1d) $304616 : 13 = \dots\dots\dots$		1e) $397523 : 7 = \dots\dots\dots$

2a) Erfinde eine Additionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 1234567. Die beiden Summanden sollen sechsstellig sein, die Ziffer 0 soll nicht vorkommen. Mache die Probe. $\begin{array}{r} \dots\dots\dots \\ + \dots\dots\dots \\ \hline 1234567 \end{array}$	2b) Erfinde eine Subtraktionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 654321. Minuend und Subtrahend sollen sechsstellig sein, die Ziffer 0 soll nicht vorkommen. Mache die Probe. $\begin{array}{r} \dots\dots\dots \\ - \dots\dots\dots \\ \hline 654321 \end{array}$	2c) Erfinde eine Multiplikationsaufgabe mit dem schönen Ergebnis $111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$. Die beiden Faktoren sollen dreistellig sein. Mache die Probe. $\begin{array}{r} \dots\dots\dots \\ \cdot \dots\dots\dots \\ \hline \dots\dots\dots \\ \hline 111111 \end{array}$
2d) Schreibe die Divisionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 12321 und dem Divisor 17 auf. Mache die Probe. $\dots\dots\dots : 17 = 12321$	2e) Schreibe die Divisionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 69696 und dem Divisor 6 auf. Mache die Probe. $\dots\dots\dots : 6 = 69696$	

3.) Schreibe unten – wie im Beispiel – zuerst dein Geburtsdatum auf und dann ohne Punkte als Zahl.
 Hole dir die Primfaktorenzerlegung dieser Zahl aus dem Internet:
<https://rechneronline.de/primfaktoren/> oder bei deinem Lehrer.
 Erstelle jetzt eine Multiplikationsaufgabe, die dein Geburtsdatum als Ergebnis hat. Mache die Probe.
Beispiel: 16.03.08; ohne Punkte als Zahl: 160308 = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 61 \cdot 73$; $160308 = (2 \cdot 3 \cdot 61) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 73) = 366 \cdot 438$

Dein Geburtsdatum: als Zahl:

Primfaktorenzerlegung: Multiplikationsaufgabe:

1a) $\begin{array}{r} 195837 \\ +137496 \\ \hline 333333 \end{array}$	1b) $\begin{array}{r} 918325 \\ -473881 \\ \hline 444444 \end{array}$	1c) $\begin{array}{r} 643 \cdot 192 \\ \hline 643 \\ 5787 \\ 1286 \\ \hline 123456 \end{array}$
1d) $304616 : 13 = 23432$	1e) $397523 : 7 = 56789$	

2a) Erfinde eine Additionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 1234567. Die beiden Summanden sollen sechstellig sein, die Ziffer 0 soll nicht vorkommen. Mache die Probe. $\begin{array}{r} 543249 \\ +691318 \\ \hline 1234567 \end{array}$	2b) Erfinde eine Subtraktionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 654321. Minuend und Subtrahend sollen sechstellig sein, die Ziffer 0 soll nicht vorkommen. Mache die Probe. $\begin{array}{r} 912312 \\ -257991 \\ \hline 654321 \end{array}$	2c) Erfinde eine Multiplikationsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 111111 = 3·7·11·13·37. Die beiden Faktoren sollen dreistellig sein. Mache die Probe. $\begin{array}{r} 231 \cdot 481 \\ \hline 924 \\ 1848 \\ 231 \\ \hline 111111 \end{array}$
2d) Schreibe die Divisionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 12321 und dem Divisor 17 auf. Mache die Probe. $209457 : 17 = 12321$	2e) Schreibe die Divisionsaufgabe mit dem schönen Ergebnis 69696 und dem Divisor 6 auf. Mache die Probe. $418176 : 6 = 69696$	

3.) Schreibe unten wie im Beispiel zuerst dein Geburtsdatum auf und dann ohne Punkte als Zahl. Hole dir die Primfaktorenzerlegung dieser Zahl aus dem Internet: <https://rechneronline.de/primfaktoren/> oder bei deinem Lehrer. Erstelle jetzt eine Multiplikationsaufgabe, die dein Geburtsdatum als Ergebnis hat. Mache die Probe.
Beispiel: 16.03.08; ohne Punkte als Zahl: 160308 = 2·2·3·3·61·73; 160308 = (2·3·61)·(2·3·73) = 366·438

Dein Geburtsdatum: **16.03.08** als Zahl: **160308**

Primfaktorenzerlegung: **2 · 2 · 3 · 3 · 61 · 73** Multiplikationsaufgabe: **366 · 438**

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man evtl. die Aufgabe 3.) weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien				
1. Einstieg FEU 15 Min.	L und SuS (Binnendifferenzierung beim Grad der Lenkung im FEU) lösen die vier Musteraufgaben und erfreuen sich an den „schönen“ Ergebnissen <table><tr><td>a) Musteraufgabe Addition: $\begin{array}{r} 374619 \\ +736492 \\ \hline 1111111 \end{array}$</td><td>b) Musteraufgabe Subtraktion: $\begin{array}{r} 374619 \\ -152397 \\ \hline 222222 \end{array}$</td></tr><tr><td>c) Musteraufgabe Multiplikation: $\begin{array}{r} 328 \cdot 271 \\ \hline 656 \\ 2296 \\ 328 \\ \hline 88888 \end{array}$</td><td>d) Musteraufgabe Division: $86415 : 7 = 12345$ <i>(Man kann auf eine Staffel-Notation verzichten und die Reste jeweils an der entsprechenden Stelle über den Dividenden schreiben: $8^1 6^2 4^3 1^3 5$)</i></td></tr></table>	a) Musteraufgabe Addition: $\begin{array}{r} 374619 \\ +736492 \\ \hline 1111111 \end{array}$	b) Musteraufgabe Subtraktion: $\begin{array}{r} 374619 \\ -152397 \\ \hline 222222 \end{array}$	c) Musteraufgabe Multiplikation: $\begin{array}{r} 328 \cdot 271 \\ \hline 656 \\ 2296 \\ 328 \\ \hline 88888 \end{array}$	d) Musteraufgabe Division: $86415 : 7 = 12345$ <i>(Man kann auf eine Staffel-Notation verzichten und die Reste jeweils an der entsprechenden Stelle über den Dividenden schreiben: $8^1 6^2 4^3 1^3 5$)</i>	Tafel
a) Musteraufgabe Addition: $\begin{array}{r} 374619 \\ +736492 \\ \hline 1111111 \end{array}$	b) Musteraufgabe Subtraktion: $\begin{array}{r} 374619 \\ -152397 \\ \hline 222222 \end{array}$					
c) Musteraufgabe Multiplikation: $\begin{array}{r} 328 \cdot 271 \\ \hline 656 \\ 2296 \\ 328 \\ \hline 88888 \end{array}$	d) Musteraufgabe Division: $86415 : 7 = 12345$ <i>(Man kann auf eine Staffel-Notation verzichten und die Reste jeweils an der entsprechenden Stelle über den Dividenden schreiben: $8^1 6^2 4^3 1^3 5$)</i>					
2. Erarbeitung FEU 15 Min.	L erarbeitet mit den SuS Verfahren, wie man ausgehend von einem schönen Ergebnis zu solchen Aufgaben kommt (vgl. Lehrerblatt). L erläutert die Strategie: Analyse einer Situation durch Lösen der Umkehraufgabe. L notiert Stichworte zu den vier Verfahren an der Tafel Diese sollen für die SuS bei der Bearbeitung des Arbeitsblattes sichtbar sein. SuS mit Smartphone holen sich die Primfaktorenzerlegung von 88888 aus dem Internet, z.B.: https://rechneronline.de/primfaktoren/	Tafel				
3. Übung EA/PA 30 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben des Arbeitsblattes und verwenden bei Zwischenrechnungen (Aufgaben 2.) bis 7.)) Konzeptpapier Bei den Divisionen kann auf die Staffelnnotation verzichtet werden. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend SuS kontrollieren gegenseitig ihre Ergebnisse Zur Aufgabe 3.): SuS holen sich die Primfaktorenzerlegung ihrer Geburtstags“zahl“ aus dem Internet bzw. L gibt ggf. SuS die Primfaktorenzerlegung ihrer Geburtstags“zahl“ Achtung: Nicht alle möglichen Geburtstags“zahlen“ haben eine für dieses Vorhaben ergiebige Primfaktorenzerlegung. Ersatzweise kann man mit anderen individuell bedeutenden Datumsangaben oder Zahlen arbeiten.	Arbeitsblatt, Konzeptpapier				

Lehrerblatt

In dieser Stunde wird gespielt. Die Spiele werden von der Lehrkraft erklärt. Die Gruppe wird in Kleingruppen eingeteilt. Die Spiele müssen von der Lehrkraft vorbereitet werden.

Spiel 1

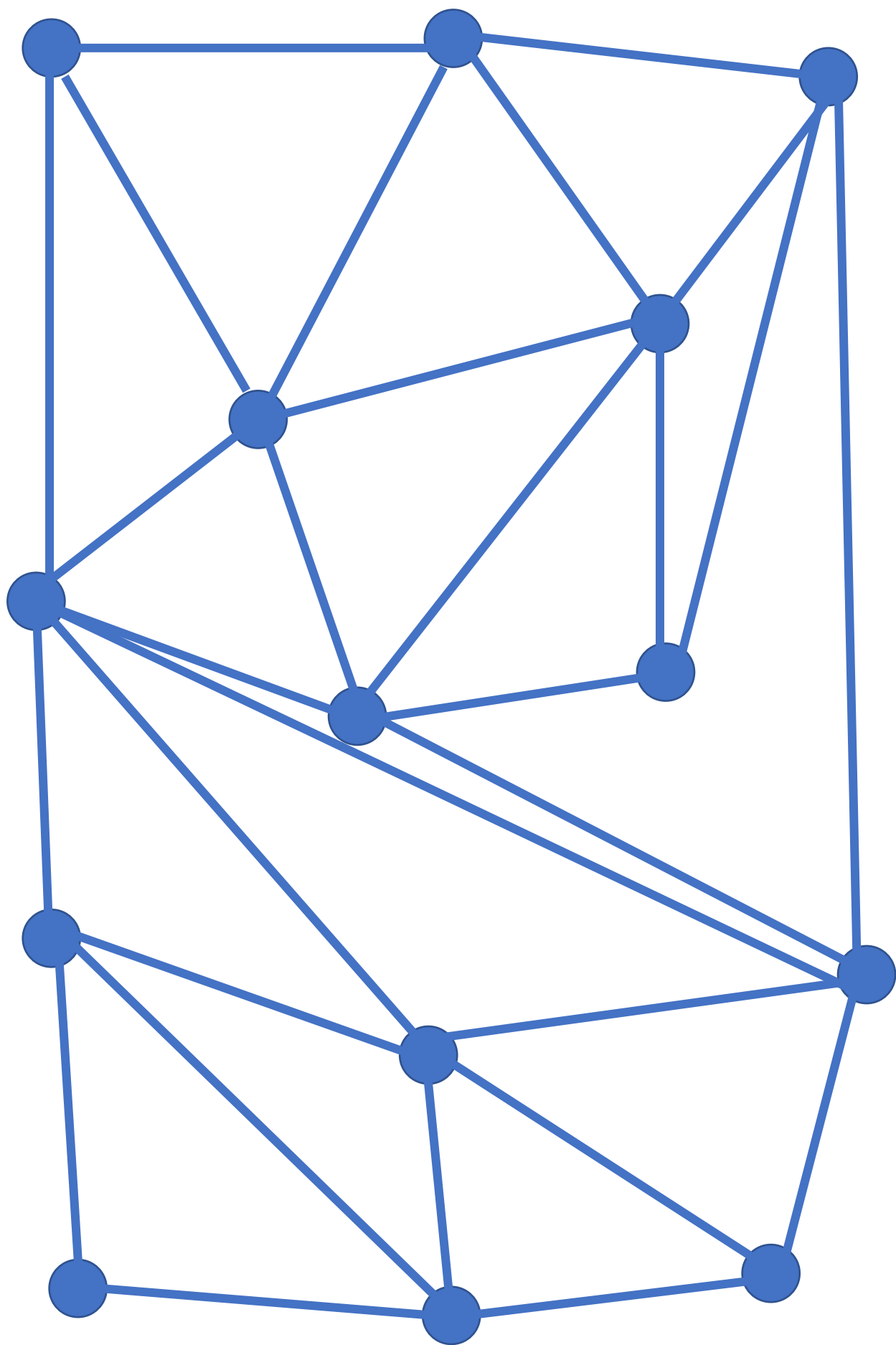
Vorbereitung: Blanko-Spielkarten werden pro Kleingruppe in je zwei Stapel à 30 Karten eingeteilt. Die Lehrkraft entscheidet sich für ein Maßsystem z.B. Gewicht, Flächeninhalt, oder Zeit. Auf die Karten des einen Stapels wird willkürlich pro Karte je eine Zahl geschrieben. Das können je nach Kenntnisstand der Klasse ganze Zahlen (auch sehr große), Kommazahlen oder Brüche sein. Auf die Karten des anderen Stapels werden Ausprägungen der gewählten Maßeinheit geschrieben, also z.B. mm, cm, m, km ungefähr zu gleichen Teilen.

Durchführung: Die Gruppe wird in Zweier-, Dreier- oder Vierergruppen eingeteilt. Die beiden Stapel werden jeweils gemischt. Jeder Schüler erhält je 5 Karten von jedem der beiden Stapel. Nun legt der erste Schüler ein Paar aus Maßzahl und Einheit heraus. Der nächste an der Reihe legt nun ebenfalls ein solches Paar heraus oder er passt. Wenn er passt, muss er ein neues Paar vom Stapel nehmen. Wenn alle gelegt oder gepasst haben, erhält der Schüler, dessen Paar den höchsten Wert hat, alle ausgelegten Karten. Er legt die Paare verdeckt jeweils als Paar vor sich. Gibt es keine Karten auf dem Stapel mehr, kann man nicht mehr passen. Das Spiel ist zu Ende, wenn ein Spieler keine Karten mehr auf der Hand hat. Gewonnen hat der Schüler, dessen Kartenpaare als Summe das größte Maß ergeben. Deshalb ist es wichtig, dass die gewonnenen Karten als Paare abgelegt werden. Die Karten, die die Spieler am Ende noch auf der Hand haben, zählen nicht.
Einfachere Version: Alle Karten werden gleich zu Beginn verteilt und man kann nicht passen.

Spiel 2

Vorbereitung: Spielplan einmal ausdrucken und dann die Linien mit Maßzahlen und Einheiten beschriften, Also z.B. 3 m 25 cm; 2,7m; 0,4 dm; usw. Beschrifteten Spielplan nach Anzahl der Kleingruppen möglichst in Din A 3 kopieren. Für das Spiel benötigt man außerdem Spielfiguren und Würfel.

Durchführung: Jeder Spieler der Kleingruppe darf seine Spielfigur auf einen beliebigen Punkt auf dem Spielplan setzen. Auf jedem Punkt darf nur eine Spielfigur stehen. Wer zuerst setzen darf, wird durch Würfeln bestimmt. Wenn nun ein Spieler eine Zahl z.B. eine 4 würfelt, dann kann er maximal 4 Wege in beliebiger Richtung gehen. Er kann aber nicht über Punkte gehen, an denen ein anderer Spieler steht. Er addiert dann die an den Wegen stehenden Maße und trägt sie auf einem Blatt Papier ein. Gewonnen hat der Spieler der nach einer vorher festgelegten Anzahl von Würfelrunden die größte Summe auf seinem Zettel stehen hat. Das Spiel verläuft spannender, wenn man jeweils das hinzugekommene Maß gleich zum bisherigen Stand addiert. So kann man immer sehen, wer gerade führt.
Man kann das Spiel auch mehrfach spielen und immer wieder neue Spielpläne verteilen.



Lehrerblatt

Ziel der vorliegenden Stunde *Brüche 3-2-1* ist die Wiederholung und „Umwälzung“ (das ist die Anwendung in unterschiedlichen Bezügen) der Kenntnisse zur Bruchrechnung unter Verwendung der zugehörigen Fachbegriffe. Auf das Zitat der vielfältigen zugehörigen Stellen des Bildungsplanes der Klassen 5/6 wird verzichtet.

Hier einige **didaktische Hinweise** zu den Brüchen und zum Bruchrechnen – möglicherweise treten beim Einstieg oder bei der Bearbeitung des Arbeitsblattes 1 inhaltliche Fragen auf:

Die **Hauptgrundvorstellung** eines Bruchs lautet so:

Teile ein Ganzes in N gleiche Teile und nimm Z davon. Schon daraus erschließt sich, dass $\frac{N}{N} = 1$. Brüche mit $Z > N$ bedürfen der gedanklichen Zusatzkonstruktion, dass Kopien verfügbar sind, auch für den Sonderfall $\frac{Z}{1} = Z$.

Erweitern eines Bruches heißt, die Unterteilung weiter zu verfeinern; teilt man jeden Teil in k gleiche Teile, so erhält man k·Z Teile vom Typ k·N. Die Umkehrung des Erweiterns ist das Kürzen. Der Wert des Bruches bleibt bei beiden Operationen unverändert.

Die **Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche** lässt sich aus dem quasikardinalen Aspekt verstehen (ein Fünftel + zwei Fünftel = drei Fünftel). Bei ungleichnamigen Brüchen stellt man durch geeignetes Erweitern gleichnamige Brüche her. Für die Erfordernisse des Arbeitsblattes 2 ist der „einfache“ Fall von Bedeutung, dass einer der beiden Nenner ein Vielfaches des anderen Nenners ist.

Die **Multiplikation mit einer ganzen Zahl**, insbesondere auch der Null, ergibt sich ebenfalls aus dem quasikardinalen Aspekt. Bei der Division wäre der direkte Zugang, den Zähler zu dividieren. Die dazu äquivalente Multiplikation des Nenners bedarf einer Zusatzüberlegung.

Ein Zugang zur **Multiplikation von Brüchen** ist der Weg über die Grundvorstellung eines Bruchs und die Multiplikation mit einer ganzen Zahl und die Division durch eine ganze Zahl.

Beispiel: Zunächst wird berechnet, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ ist. Nach der Grundvorstellung eines Bruches muss man also $\frac{4}{5}$ in 3 gleiche Teile teilen und dann 2 davon nehmen.

Das bedeutet $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ ist $\left(\frac{4}{5} : 3\right) \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$. Das Produkt $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ wird dann definiert als $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$.

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation.

Division durch 0: Was ist $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$? Anders gefragt: Wie oft passt $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$?

Antwort: 2mal. Nimmt man 2mal $\frac{1}{3}$, so sind die $\frac{2}{3}$ „voll“.

Wie oft passt 0 in $\frac{2}{3}$?

Antwort: Man kann so viele Nullen nehmen wie man möchte, die $\frac{2}{3}$ werden damit nicht „voll“.

Zum **Ablauf**:

Zeitbedarf insgesamt ca. 45 bis 60 Min.

Brainstorming zum **Einstieg** „Was wisst ihr über das Rechnen mit Brüchen?“, möglich wäre auch ein Brainstorming zum Thema „Wo muss man beim Bruchrechnen besonders aufpassen?“ oder „Was ist beim Bruchrechnen besonders schwierig?“.

Die Lehrkraft stellt das **Arbeitsblatt 1** vor und macht eine der 13 Multiple-Choice-Aufgaben (z.B. 2.)) mit der Lerngruppe gemeinsam.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das **Arbeitsblatt 1** in Einzel- oder Partnerarbeit und machen die angebotene Probe.

Neben der Wiederholung der Fakten zur Bruchrechnung ist die Sprachschulung und das Üben des genauen sinnerfassenden Lesens ein wichtiges Bildungsziel.

Die Lehrkraft stellt den Aufgabentyp des **Arbeitsblatts 2** vor (**Differenzierung**: Varianten 2a, 2b und 2c mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad, es kommen jeweils komplexere Aufgaben dazu) und löst die folgenden drei Musteraufgaben mit der Lerngruppe gemeinsam:

Das Ergebnis jedes Zahlterms soll immer 1 sein. Setze dazu für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3 ein, insgesamt soll der Zahlterm so viele Zweien und Dreien enthalten wie angegeben.

i) Anzahl der Zweien: 5 | Anzahl der Dreien: 4

$$\frac{?}{?+?} + \frac{?+?}{2+2+3+3}; \text{ Ergebnis: } \frac{3}{2+3} + \frac{2+2}{2+2+3+3}$$

Überlegung zum Lösungsweg: Zum Nenner 10 passt bei der Addition zweier Brüche der Nenner 5 (= 2 + 3) sehr gut. Für die Zähler bleiben dann mit den Ziffern 2; 2 und 3 nicht mehr viele Möglichkeiten.

ii) Anzahl der Zweien: 4 | Anzahl der Dreien: 6

$$\frac{?+?+?}{3+3} \cdot \frac{?+?}{2+3+3}; \text{ Ergebnis: } \frac{2+2+3}{3+3} \cdot \frac{2+3}{2+3+3}$$

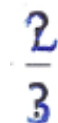
Überlegung zum Lösungsweg: Man sollte kürzen können. Am einfachsten wäre es, wenn die beiden Zähler 6 und 8 ergeben würden. Das kann man mit den noch zu vergebenden Ziffern 2; 2; 2; 3 und 3 hinbekommen.

iii) Anzahl der Zweien: 1 | Anzahl der Dreien: 6

$$\frac{? \cdot ? + ? \cdot ?}{? \cdot ? \cdot ?}; \text{ Ergebnis: } \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3}$$

Überlegung zum Lösungsweg: Es gibt nur eine 2. Wo diese unterbringen? Es gibt wegen der Kommutativität der Addition und Multiplikation nur zwei Möglichkeiten – im Nenner oder im Zähler an einer beliebigen Stelle.

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das Arbeitsblatt 2 (nach Auswahl der Lehrkraft 2a, 2b oder 2c) in Einzel- oder Partnerarbeit. Das Fragezeichen lässt sich dabei recht ordentlich mit einer „2“ oder einer „3“ überschreiben (günstig: z.B. blaue Farbe), indem man den oberen Bogen des Fragezeichens für den oberen Bogen der Ziffer „2“ bzw. der Ziffer „3“ nutzt, vgl. Bild. Beim Probieren können die Schülerinnen und Schüler ggf. zuerst Bleistifteintragungen machen und diese dann ggf. radieren.



Die Bruchrechneregeln werden durch den **Umkehraufgabentypus** besonders intensiv umgewälzt.

13 Aufgaben:

- **Kreuze** jeweils die richtige Antwort **an**.
- **Kringle** die Zahl **ein**, die in Klammern hinter der richtigen Antwort steht.
- **Mache** zum Schluss die **Probe**: die **Summe der dreizehn Zahlen muss 80** ergeben.

1.) Wie erweitert man einen Bruch mit einer Zahl? Beispiel: Erweitere $\frac{3}{4}$ mit 5.

- ☐ Indem man die Zahl zum Zähler und zum Nenner addiert. (7)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner durch die Zahl dividiert. (1)
- ☐ Indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert. (9)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner mit der Zahl multipliziert. (11)

2.) Wie addiert man zwei Brüche mit gleichem Nenner? Beispiel: $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$

- ☐ Indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner addiert. (3)
- ☐ Indem man die beiden Zähler addiert und den gemeinsamen Nenner beibehält. (12)
- ☐ Indem man die beiden Zähler multipliziert und den gemeinsamen Nenner verdoppelt. (6)
- ☐ Brüche mit gleichem Nenner kann man nicht addieren. (2)

3.) Wie multipliziert man zwei Brüche? Beispiel: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$

- ☐ Indem man die Brüche durch Erweitern zunächst auf einen gemeinsamen Nenner bringt und dann die Zähler multipliziert und den gemeinsamen Nenner beibehält. (4)
- ☐ Indem man die beiden Zähler addiert und die Nenner multipliziert. (8)
- ☐ Indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner multipliziert. (5)
- ☐ Zwei Brüche kann man nicht multiplizieren. (10)

4.) Wie multipliziert man einen Bruch mit einer ganzen Zahl? Beispiel: $5 \cdot \frac{3}{4}$

- ☐ Indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. (5)
- ☐ Indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. (11)
- ☐ Indem man den Zähler und den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. (12)
- ☐ Es ist nicht möglich, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren. (3)

5.) Wie dividiert man einen Bruch durch einen zweiten Bruch? Beispiel: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

- ☐ Indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. (1)
- ☐ Indem man den Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert. (2)
- ☐ Indem man den Kehrwert des Bruchs mit dem zweiten Bruch multipliziert. (10)
- ☐ Brüche kann man nicht durch einander dividieren. (7)

6.) Was ergibt sich, wenn man einen Bruch mit 0 multipliziert? Beispiel: $0 \cdot \frac{3}{4}$

- ☐ Es ergibt sich 0. (4)
- ☐ Es ergibt sich der Bruch selbst. (9)
- ☐ Es ergibt sich die Hälfte des Bruchs. (6)
- ☐ Einen Bruch kann man nicht mit 0 multiplizieren. (8)

7.) Was ergibt sich, wenn man einen Bruch durch 0 dividiert? Beispiel: $\frac{3}{4} : 0$

- ☐ Es ergibt sich 0. (7)
- ☐ Es ergibt sich der Bruch selbst. (11)
- ☐ Es ergibt sich das Doppelte des Bruchs. (3)
- ☐ Einen Bruch kann man nicht durch 0 dividieren. (1)

8.) Wie kürzt man einen Bruch mit einer Zahl? Beispiel: Kürze $\frac{9}{12}$ mit 3.

- ☐ Indem man von Zähler und Nenner die Zahl subtrahiert. (2)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner mit der Zahl multipliziert. (10)
- ☐ Indem man den Nenner durch die Zahl dividiert. (4)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner durch die Zahl dividiert. (9)

9.) Wie subtrahiert man von einem Bruch einen zweiten Bruch? Beispiel: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

- ☐ Man subtrahiert Zähler von Zähler und Nenner von Nenner. (5)
- ☐ Man bringt die Brüche zunächst durch Erweitern auf denselben Nenner und subtrahiert dann die Zähler. (6)
- ☐ Man bringt die Brüche zunächst durch Erweitern auf denselben Zähler und subtrahiert dann die Nenner. (8)
- ☐ Zwei Brüche kann man nicht subtrahieren. (12)

10.) Wie dividiert man einen Bruch durch eine ganze Zahl? Beispiel: $\frac{3}{4} : 5$

- ☐ Indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. (2)
- ☐ Indem man den Zähler und den Nenner durch die ganze Zahl dividiert. (9)
- ☐ Indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. (11)
- ☐ Es ist nicht möglich, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren. (6)

11.) Was ergibt die Multiplikation eines Bruches mit seinem Kehrwert? Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$

- ☐ Es ergibt sich 1. (3)
- ☐ Es ergibt sich 0. (7)
- ☐ Es ergibt sich der Kehrwert des Bruchs. (1)
- ☐ Einen Bruch kann man nicht mit seinem Kehrwert multiplizieren. (8)

12.) Welchen Wert hat ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind? Beispiel: $\frac{3 \cdot 4}{6 + 6}$

- ☐ Der Bruch hat den Wert 0. (12)
- ☐ Der Bruch hat den Wert 1. (5)
- ☐ Der Bruch hat den Wert des Zählers. (10)
- ☐ Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind sinnlos. (4)

13.) Welchen Wert hat ein Bruch, dessen Nenner gleich 1 ist? Beispiel: $\frac{3}{1}$

- ☐ Der Bruch hat den Wert 0. (9)
- ☐ Der Bruch hat den Wert 1. (4)
- ☐ Der Bruch hat den Wert des Zählers. (6)
- ☐ Brüche mit Nenner 1 sind sinnlos. (8)

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1 mal die 2	2 mal die 2	3 mal die 2	4 mal die 2	5 mal die 2	6 mal die 2
1 mal die 3	$3 - 2$	$2 \cdot 2 - 3$	$2 \cdot \frac{3-2}{2}$	$\frac{3 \cdot 2}{2+2+2}$	$2 - \frac{2+2+2}{2 \cdot 3}$	$\frac{3}{2+2} + \frac{2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$
2 mal die 3	$2 - \frac{3}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$	$2 - \frac{2+3}{2+3}$	$\frac{2+2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{2+2+2+2}{2+3+3}$	$\frac{2+2}{2+2+2} + \frac{2}{3+3}$
3 mal die 3	$\frac{3+3}{3} : 2$	$\frac{2}{3+3} + \frac{2}{3}$	$\frac{2 \cdot 3}{2} : \frac{3+3}{2}$	$\frac{2+2}{2 \cdot 3} + \frac{3-2}{3}$	$\frac{3 \cdot 3}{2+2} - \frac{3+2}{2+2}$	$\frac{3 \cdot 3 + 3}{2+2+2+2+2+2}$
4 mal die 3	$\frac{3}{2} - \frac{3}{3+3}$	$\frac{3}{3+3} + \frac{3-2}{2}$	$\frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 - 3$	$\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{3-2}{3+3-2}$	$\frac{3+3}{2 \cdot 3} + (2-2) \cdot \frac{2 \cdot 2}{3}$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 - 2}{3+3} : \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3}$
5 mal die 3	$\frac{3}{3+3+3} + \frac{2}{3}$	$\frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 + 3}$	$\frac{3+3}{2+3} \cdot \frac{2+3}{2 \cdot 3}$	$\frac{2 \cdot 3}{2+3+3} + \frac{2}{2+3+3}$	$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3-2}{2 \cdot 3}$	$\frac{3}{2+2+2} + \frac{2}{3+3} + \frac{3-2}{2 \cdot 3}$
6 mal die 3	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3+3+3} - 2$	$\frac{3}{3 \cdot 3 + 3} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3}$	$\frac{2+3}{2+2} - \frac{3}{3+3+3+3}$	$\frac{3 \cdot 3}{3+3} : \frac{3+2 \cdot 3}{2+2+2}$	$\frac{3}{2+2+2} + \frac{3:3}{3+3} + \frac{2}{2 \cdot 3}$	$\frac{3-2}{2+3} + \frac{3}{2+2+3+3} + \frac{3-2}{2}$

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1 mal die 2	2 mal die 2	3 mal die 2	4 mal die 2
1 mal die 3	$? - ?$	$? \cdot ? - ?$	$? \cdot \frac{? - ?}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{? + ? + ?}$
2 mal die 3	$? - \frac{?}{?}$	$\frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$	$? - \frac{? + ?}{2 + 3}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} \cdot \frac{?}{2}$
3 mal die 3	$\frac{? + ?}{?} : ?$	$\frac{?}{3 + 3} + \frac{2}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{2} : \frac{? + ?}{2}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} + \frac{? - ?}{3}$
4 mal die 3	$\frac{?}{?} - \frac{3}{3 + 3}$	$\frac{3}{3 + 3} + \frac{? - ?}{?}$	$\frac{?}{?} + 3 \cdot \frac{?}{?} - 2 - 3$	$\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{? - ?}{? + ? - ?}$

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1 mal die 2	2 mal die 2	3 mal die 2	4 mal die 2	5 mal die 2
1 mal die 3	$? - ?$	$? \cdot ? - ?$	$? \cdot \frac{? - ?}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{? + ? + ?}$	$2 - \frac{? + ? + ?}{? \cdot ?}$
2 mal die 3	$? - \frac{?}{?}$	$\frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$	$? - \frac{? + ?}{2 + 3}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} \cdot \frac{?}{2}$	$\frac{? + ? + ? + ?}{? + ? + ?}$
3 mal die 3	$\frac{? + ?}{?} : ?$	$\frac{?}{3 + 3} + \frac{2}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{2} : \frac{? + ?}{2}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} + \frac{? - ?}{3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 2} - \frac{3 + 2}{? + ?}$
4 mal die 3	$\frac{?}{?} - \frac{3}{3 + 3}$	$\frac{3}{3 + 3} + \frac{? - ?}{?}$	$\frac{?}{?} + 3 \cdot \frac{?}{?} - 2 - 3$	$\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{? - ?}{? + ? - ?}$	$\frac{? + ?}{? \cdot ?} + (2 - 2) \cdot \frac{? \cdot ?}{?}$
5 mal die 3	$\frac{3}{3 + 3 + 3} + \frac{?}{?}$	$\frac{? \cdot ? + ? \cdot ?}{3 \cdot 3 + 3}$	$\frac{3 + 3}{? + ?} \cdot \frac{? + ?}{2 \cdot 3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 3 + 3} + \frac{?}{2 + 3 + 3}$	$\frac{?}{2 \cdot ?} + \frac{3}{2 \cdot ?} + \frac{3 - ?}{2 \cdot ?}$

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1 mal die 2	2 mal die 2	3 mal die 2	4 mal die 2	5 mal die 2	6 mal die 2
1 mal die 3	$? - ?$	$? \cdot ? - ?$	$? \cdot \frac{? - ?}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{? + ? + ?}$	$2 - \frac{? + ? + ?}{? \cdot ?}$	$\frac{?}{? + ?} + \frac{?}{? \cdot ? \cdot ?}$
2 mal die 3	$? - \frac{?}{?}$	$\frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$	$? - \frac{? + ?}{2 + 3}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} \cdot \frac{?}{2}$	$\frac{? + ? + ? + ?}{? + ? + ?}$	$\frac{2 + 2}{? + ? + ?} + \frac{?}{? + ?}$
3 mal die 3	$\frac{? + ?}{?} : ?$	$\frac{?}{3 + 3} + \frac{2}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{2} : \frac{? + ?}{2}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} + \frac{? - ?}{3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 2} - \frac{3 + 2}{? + ?}$	$\frac{? \cdot ? + ?}{2 + 2 + 2 + ? + ? + ?}$
4 mal die 3	$\frac{?}{?} - \frac{3}{3 + 3}$	$\frac{3}{3 + 3} + \frac{? - ?}{?}$	$\frac{?}{?} + 3 \cdot \frac{?}{?} - 2 - 3$	$\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{? - ?}{? + ? - ?}$	$\frac{? + ?}{? \cdot ?} + (2 - 2) \cdot \frac{? \cdot ?}{?}$	$\frac{? \cdot ? \cdot ? - ?}{3 + 3} : \frac{? \cdot ?}{2 \cdot 3}$
5 mal die 3	$\frac{3}{3 + 3 + 3} + \frac{?}{?}$	$\frac{? \cdot ? + ? \cdot ?}{3 \cdot 3 + 3}$	$\frac{3 + 3}{? + ?} \cdot \frac{? + ?}{2 \cdot 3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 3 + 3} + \frac{?}{2 + 3 + 3}$	$\frac{?}{2 \cdot ?} + \frac{3}{2 \cdot ?} + \frac{3 - ?}{2 \cdot ?}$	$\frac{3}{? + ? + ?} + \frac{2}{? + ?} + \frac{3 - 2}{? \cdot ?}$
6 mal die 3	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{? + ? + ?} - ?$	$\frac{3}{3 \cdot 3 + ?} \cdot \frac{? \cdot ? \cdot ?}{3}$	$\frac{? + ?}{? + ?} - \frac{3}{3 + 3 + 3 + 3}$	$\frac{3 \cdot 3}{? + ?} : \frac{3 + 2 \cdot 3}{? + ? + ?}$	$\frac{3}{2 + 2 + 2} + \frac{3 : 3}{3 + ?} + \frac{?}{? \cdot ?}$	$\frac{3 - 2}{? + ?} + \frac{3}{? + ? + ? + ?} + \frac{3 - 2}{?}$